Hoja de Prácticas tema 3: Máximos y Mínimos

1. Hallar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

   (b) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

   (c) $f(x,y) = y + x\sin y$

   (d) $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

   (e) $f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$

   (f) $f(x,y,z) = -2x^2-y^2-3z^2+2xy+2yz+1$

   (g) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

Solución:
(a) En este caso $\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2y+2x)$, es decir son extremos locales $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$ y todos son mínimos locales, pues la función es $f(x,y) = (x+y)^2$, ahora bien el hessiano en esos puntos es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) En este caso $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)e^{1+x^2-y^2}$ luego el punto crítico es $(0,0)$, y es punto de silla dado que

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) En este caso $\nabla f(x,y) = (\sin y, 1 + x\cos y)$ así los puntos críticos son $(x_k, y_k) = ((-1)^{k+1}, k\pi)$, donde $k\in\mathbb{Z}$, y son puntos de silla pues en estos puntos

$$Hf(x_k,y_k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) En este caso $\nabla f(x,y) = (2x - 2x(x^2+4y^2), 8y - 2y(x^2+4y^2))e^{1-x^2-y^2}$ así los puntos críticos son $\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$, y (0,0) es un mínimo, (0,1) y $(0,-1)$ son máximos, y (1,0), $(-1,0)$ son puntos de silla.

(e) En este caso $\nabla f(x,y) = (4(x^2-y^2-1), -8xy)/(x^2+y^2+1)^2$ así los puntos críticos son $\{(1,0),(-1,0)\}$ y así (1, 0) es un mínimo y $(-1,0)$ es un máximo.

(f) En este caso $\nabla f(x,y,z) = (-4x+2y, -2y+2x+2z, -6z+2y)$ así el punto crítico es $(0,0,0)$, el Hessiano de la función en el $(0,0,0)$ es

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante negativo no se sabría qu'e es. Pero en este caso completando cuadrados se sigue que es un máximo. (g) Se deja al estudiante realizarlo, saliendo $(1/2, 1, 1)$ (mínimo), y $(-1/2, -1, -1)$ (máximo).

2. Considérese el conjunto de tres puntos no alineados en $\mathbb{R}^2$ dado por $\{x_i, y_i\} = \{(0,0), (1,1), (1,2)\}$. Determinar los parámetros de la ecuación de una recta $y = mx + b$ de forma tal que la suma de cuadrados

$$S(m;b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - (mx_i + b))^2$$

sea mínima (Método de ajuste por cuadrados mínimos). Representar gráficamente el conjunto de puntos dado y la recta obtenida. Verificar que el resultado obtenido es un mínimo de la función S.

Solución: Para resolver el problema debemos, en primer lugar asumir que los puntos están sobre dicha recta, obteniendose

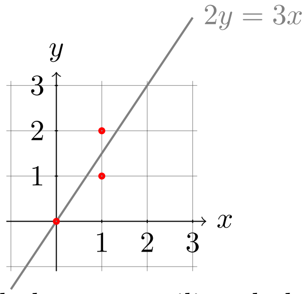
$$\left\{ \begin{array}{l} mx_1 + b = y_1 \\ mx_2 + b = y_2 \\ mx_2 + b = y_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Y se sabe que si llamamos escribimos ese sistema de la forma $Ax = c$, al ser sobredeterminado no siempre tiene solución pero igualmente es conocido que la proyección de las columnas de A sobre c dan la solución al problema de mínimos cuadrados, cuya solución se expresa de la forma

$$p = A\overline{x}, \qquad A^T A\overline{x} = A^T c.$$

De hecho, el sistema queda de la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \overline{m} = 3/2, \qquad \overline{b} = 0.$$



Para estos valores se tiene

$$S(m;b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - 3x_i/2)^2 = 1/2.$$

Pero si lo hacemos utilizando la teoría de extremos relativos, se tiene

$$\nabla S(m;b) = (4(m+b) - 6, 2b + 4(m+b) - 6) = (0,0)$$

entonces $b = 0$ y $m = 3/2$. Y el Hessiano en este punto es

$$HS(3/2;0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

por tanto es un mínimo, y se cumple lo descrito en el ejercicio.

3. Hallar los extremos de las funciones siguientes sujetos a las restricciones que se indican:

   (a) $f(x, y, z) = x - y + z$, sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

   (b) $f(x, y) = x$, sujeto a $x^2 + 2y^2 = 3$

   Solución: Resolvamos aplcando el método de los multiplicadores de Lagrange.
   a) Tomaremos la función $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ cuyo gradiente es

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = (1 + 2x\lambda, -1 + 2y\lambda, 1 + 2z\lambda, x^2 + y^2 + z^2 - 2)$$

   Y este es igual a cero, si $x = -1/(2\lambda)$, $y = 1/(2\lambda)$, $z = -1/(2\lambda)$, y como ha de verificarse la cuarta condición $3/(4\lambda^2) = 2$, es decir $\lambda = \pm\sqrt{3/8}$, obteniendo los puntos $P_1 = (-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$, y $P_2 = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$. Y dado que el conjunto $x^2+y^2+z^2 = 2$ es cerrado y acotado (compacto) alcanza su máximo y mínimo absoluto, y en este caso P_1 es un mínimo absoluto, y P_2 máximo absoluto.

   b) En este caso $G(x, y, \lambda) = x + \lambda(x^2 + 2y^2 - 3)$ siendo

$$\nabla G(x, y, z, \lambda) = (1 + 2x\lambda, 4y\lambda, x^2 + 2y^2 - 3).$$

   Y se anula en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$. Evaluando la función original en estos puntos concluimos que $(\sqrt{3}, 0)$ es el máximo absoluto y $(-\sqrt{3}, 0)$ es el mínimo absoluto en el conjunto (que es un compacto).

4. Estudiar la existencia de máximos y mńimos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionados por $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$ y $x + y = z$.

Solución:
En este caso consideramos la función $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2/4 - 1) + \mu(x + y - z)$, siendo

$$\nabla F(x, y, z, \lambda, \mu) = (2x(1 + \lambda) + \mu, 2y(1 + \lambda) + \mu, z(2 + 1/2\lambda) - \mu, x^2 + y^2 + z^2/4 - 1, x + y - z).$$

Si es igual a cero, tomando las dos primeras expresiones deducimos que $2(x - y)(\lambda + 1) = 0$, pero si $\lambda = -1$, entonces $\mu = 0$ y deducimos que $z = 0$, y por tanto $x = \pm\sqrt{2}/2$ e $y = \mp\sqrt{2}/2$. Dando lugar esto a los puntos

$$P_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0), \qquad P_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0).$$

Mientras que si $x = y$, se obtienen los puntos

$$P_3 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3), \qquad P_4 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -2\sqrt{3}/3).$$

Dado que la función en P_1 y P_2 vale lo mismo igual a 1, y en P_3 y P_4 vale lo mismo e igual a 2. Se sigue que P_1 y P_2 son mínimos absolutos, mientras que P_3 y P_4 son máximos absolutos.

5. Hallar los extremos de f restringida a $\mathcal{S}$, donde

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad \mathcal{S} = \{(x, \cos x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Solución:
En este caso la función es $f(x) = x^2 - (\cos x)^2$. Calculemos sus extremos:

$$f'(x) = 2x + 2\cos x \sin x = 2x + \sin(2x)$$

Y esto vale 0 solo para $x = 0$ y dado que $f''(0) = 2 + 2\cos 0 = 4$, se tiene que $(0, \cos 0) = (0, 1)$ es un mínimo de la función en $\mathcal{S}$.

6. Usar multiplicadores de Lagrange para probar que el producto de tres números positivos x, y, z, cuya suma tiene el valor prefijado $\mathcal{S}$, es máximo cuando los tres números son iguales.

Solución:

Consideramos la función $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 3S)$ donde S es un valor fijado y positivo. Entonces

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = (yz + \lambda, xz + \lambda, zy + \lambda, x + y + z - 3S)$$

es 0 si, entre otras cosas, $yz = xz = xy$ por lo que alguno de los 3 es cero, o $x = y = z$, imponiendo la última condición se tiene que $x = y = z = S$. Pero para alguno de ellos igual a cero tenemos un mínimo, mientras que para $x = y = z = S$ tenemos el máximo.

7. Usar multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que se puede inscribir (con sus aristas paralelas a los ejes coordenados) en el elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución: Consideramos la función $F(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$. Entonces

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \left(8yz + \frac{2x\lambda}{a^2}, 8xz + \frac{2y\lambda}{b^2}, 8xy + \frac{2z\lambda}{c^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

es 0 (dado que $xyz \neq 0$) se tiene que $bx = ay$, $az = cx$ y al tener que cumplirse la condición del elipsoide nos salen los puntos $(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}, \pm c/\sqrt{3})$ para los que es sencillo comprobar que el volumen de la caja es máxima siendo este

$$V = 8\frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

8. Descomponer un núumero positivo a en tres factores positivos ($a = xyz$) de tal forma que la suma de sus inversos sea mínima ($\mathcal{S} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$)

   Solución: Consideramos la función $F(x, y, z, \lambda) = (1/x + 1/y + 1/z) + \lambda(xyz - A^3)$ donde A es un valor fijado y positivo, es decir, $a = A^3$. Entonces

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = \left(-\frac{1}{x^2} + \lambda yz, -\frac{1}{y^2} + \lambda xz, -\frac{1}{z^2} + \lambda xy, xyz - A^3\right)$$

   es 0 si $x^2yz = xy^2z = xyz^2$ por tanto $x = y = z$ y al cumplirse la última condición se tiene que $x = y = z = A$, de tal forma que la suma de inversos es mínima.

9. Hallar la mínima distancia de los puntos de la superficie $x^2 - yz + x = 2$ al origen.

Solución: Decir que la distancia de un punto al origen es mínima es lo mismo que decir que dicha distanciía al cuadrado es mínima, y dado que la distancia al cuadrado entre el punto (x, y, z) al origen es

$$d^2((x, y, z), (0, 0, 0) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Lo que nos piden es minimizar, empleando los miltiplicadores de Lagrange, la función

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - yz + x - 2),$$

y dado que

$$\nabla F(x, y, z, \lambda) = (2x(1 + \lambda) + 1, 2y - z\lambda, 2z - y\lambda, x^2 - yz + x - 2)$$

es igual a $(0, 0, 0, 0)$ para $y = -z$ (y, $z \neq 0$), $\lambda = -2$, $x = 1/2$ para la cual la distancia resulta $11/4$. Y si $y = z = 0$, se tiene que $x = 1$, $x = -2$ siendo en el primer caso la distancia cuadrática igual a 1, y en el otro 4, así la distancia es igual a 1 en el punto $P = (1, 0, 0)$.

10. Considérese la curva $\mathcal{C}$ definida por laintersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14, \qquad 2x + y - z = 2.$$

Determínese el punto más alto de $\mathcal{C}$ justificando la respuesta.

Solución: El punto más alto bajo esas restricciones será el máximo absoluto de la función

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14) + \mu(2x + y - z - 2).$$

En este caso

$$\nabla H(x, y, z, \lambda, \mu) = (2x\lambda + 2\mu, 2y\lambda + \mu, 1 + 2z\lambda - \mu, x^2 + y^2 + z^2 - 14, 2x + y - z - 2),$$

Teniendo en cuenta que $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$x = 2y = -2z - \frac{1}{\mu}.$$

Imponiendo el resto de condiciones resulta $y = \dfrac{4\mu - 1}{12\mu}$ y al imponer la ecuación de la esfera se obtiene $\mu = \pm 1/8$, obteniendose los puntos

$$P_1 = (-2/3, -1/3, -11/3), \qquad P_2 = (2, 1, 3),$$

por tanto el más alo es el punto $(2, 1, 3)$.

11. Sea la función $f(x, y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$.

(a) Encontrar sus extremos relativos e indicar el carácter de los mismos.

(b) Calcular sus posibles extremos condicionados cuando las variables (x, y) están ligadas por la relación $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución: (a) $\nabla f(x, y) = (2xy + 4x, 3y^2 + x^2 + 4y - 4) = (0, 0)$ para $(0, -2)$ y $(0, 2/3)$. Dado que el Hessiano es

$$Hf(0, y) = \begin{pmatrix} 2y + 4 & 0 \\ 0 & 6y + 4 \end{pmatrix}$$

se tiene que el punto $(0, 2/3)$ es un mínimo mientras que el punto $(0, -2)$ sobre la curva $x = 0$ es un máximo, y sobre la curva $y = -2$ no es un extremo relativo por tanto $(0, -2)$ es un punto de silla.

(b) Si tenemos en cuenta la ligadura, entonces

$$F(x, y, \lambda) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

que tiene como gradiente

$$\nabla F(x, y, \lambda) = (2xy + 4x + 2x\lambda, 3y^2 + x^2 + 4y - 4 + 2y\lambda, x^2 + y^2 - 1)$$

que se anula cuando $x = 0$ o $y = -2 - \lambda$, en el primer caso obtenemos los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ y en el segundo caso comprobamos que no tienen soluciones, al calcular el valor de la función sobre esos puntos deducimos que $(0, 1)$ es el mínimo absoluto y que $(0, -1)$ es el máximo absoluto.

(c) Dado que este conjunto incluye su frontera (es cerrado) y es acotado, pues alcanza sus máximos y mínimos absolutos que están entre los puntos obtenidos en los apartados (a) y (b). Siendo $(0, -1)$ el máximo absoluto y $(0, 2/3)$ el mínimo absoluto.

12. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ definida en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución:

13. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = \sin x + \cos y$ definida en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución:

14. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos dela función $f(x,y) = xy$ definida en el rectángulo $R = [-1,1] \times [-1,1]$.

Solución: En este caso primero calcularemos los extremos relativos en el interior del cuadrado.

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

que se anula en el $(0,0)$ que es un punto de silla. Ahora hemos de analizar lo que sucede en los diferentes bordes:

• Sobre el lado situado en $x = 1$: la función es $f(x,y) = y$ que es creciente, luego no tiene extremos en $(-1,1)$.
• Sobre el lado situado en $x = -1$: la función es $f(x,y) = -y$ que es decreciente, luego no tiene extremos en $(-1,1)$.
• Sobre el lado situado en $y = 1$: la función es $f(x,y) = x$ que es creciente, luego no tiene extremos en $(-1,1)$.
• Sobre el lado situado en $y = -1$: la función es $f(x,y) = -x$ que es decreciente, luego no tiene extremos en $(-1,1)$.
Quedando por analizar lo que sucede en los cuatro vertices, así los máximos absolutos son $(1,1)$ y $(-1,-1)$, mientras que los mínimos absolutos son $(-1,1)$ y $(1,-1)$.

15. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$ en la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 4$.

Solución: Consideremos la función

$$F(x, y, \lambda, \mu) = 12 - 3x - 2y + \lambda(y - x^2) + \mu(y - 4).$$

para $\lambda = \mu = 0$ calculamos los puntos críticos, viendo que no hay. Seguidamente vemos que sucede en el borde del conjunto. Primero analizamos el caso $\mu = 0$, con gradiente

$$\nabla F(x, y, \lambda, 0) = (-3 - 2x\lambda, -2 + \lambda, y - x^2)$$

igual a cero para $(-3/4, 9/16)$; y luego analizamos el caso $\lambda = 0$, cuyo gradiente nunca se anula. Finalmente debemos considerar los puntos de corte de las fronteras, en este caso $(-2, 4)$ y $(2, 4)$. Teniendo en cuenta toda esta información el máximo absoluto es $(-3/4, 9/16)$ y el mínimo absoluto es $(2, 4)$.

16. Probar que la caja rectangular de volumen dado tiene superficie mínima cuando es un cubo.

Solución:

17. Determinar cuál es la lata cilíndrica (con tapa) de un litro de volumen que se puede fabricar usando la mínima cantidad de metal.

    Solución:

Ejercicios de Ampliación: Polinomio de Taylor

1. Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = (x+y)^2$ en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
2. Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = e^{x+y}$ en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3. Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función
$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy)$$
en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
4. Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función
$$f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$$
en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
5. Determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función
$$f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$$
en el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.