Hoja de Prácticas tema 6: Integral de Superficie

1. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada

$$S(u,v) = (u^2 - v^2, u + v, u^2 + 4v)$$

en $(u,v) = (0, 1/2)$

2. Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$, y un vector normal en el punto $(5, 6, 6)$.

3. Determinar el área de la superficie $z = x^2 + y^2$ limitada por el plano $z = 4$.

4. Sea S la esfera dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Determinar el área de la parte de S que es exterior al cono $z^2 = x^2 + y^2$. Determinar el área de toda la esfera.

5. Calcular las siguientes integrales de superficie:

   (a) $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

   (b) $\iint_S xy\, dS$, donde S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $y = 0$ y $x + y = 2$.

   (c) $\iint_S xz\, dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

   (d) $\iint_S xyz\, dS$, donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada por encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

6. Evaluar la integral de superficie del campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = \left(1, 1, z(x^2 + y^2)^2\right)$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

7. Parametrizar la superficie $S : 2x^2 + y^2 + z^2 - 8\,x = 1$ y calcular la integral de superficie dl campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x,y,z)$ sobre S.

8. Para el campo de velocidades de un fluido $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x, x^2, yz + 1)$ (en metros por segundo) determinar el flujo por segundo a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z = 0$. Repite dicha integral para $z = 2$.

9. Sea $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y,z,xz)$. Evaluar

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}(x,y,z) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

sobre la frontera S de las regiones.

   (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$,

   (b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ and $x \geq 0$.

10. Determinar el flujo de los campos vectoriales dados a través de las superficies correspondientes.

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (e^y, ye^x, x^2y)$, S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situada por encima del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ orientada hacia arriba.

   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (-y,x,3z)$, S es la superficie formada por el paraboloide $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ orientada hacia arriba.

   (c) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (0,y,-z)$, S ies la superficie formada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ y el círculo $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$ y está orientada hacia el exterior.

11. Sea S la superficie que consta de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Sea $\vec{\mathbf{E}}$ el campo eléctrico definido por $\vec{\mathbf{E}}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Calcular el flujo eléctrico a través de S.

12. Si el campo de velocidades de un fluido es $\vec{\mathbf{V}}(x,y,z) = (2y, x + y, 1)$ (expresado en metros/segundo), determinar los metros cúbicos de fluido que cruzan en un segundo por el cilindro parabólico $y = 2 - x^2$, para $0 \leq z \leq 2$, $y \geq 0$.

13. Calcular el flujo del campo vectorial través de la superficie dada (si la superficie es cerrada, se considera orientada hacia el exterior):

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, y^2 + xz, \sin(xy))$, S es la frontera de la región limitada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$.

   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$, S es la superficie del cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

   (c) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x^3 + y\sin z, y^3 + z\sin x, 3z)$, S es la frontera de la región limitada por las semiesferas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

Ejercicios de ampliación

1. Se llama toro a la superficie generada por la circunferencia $(x-a)^2+z^2=b^2$, $y=0$ (se supone $a>b$) al girar alrededor del eje OZ. Encontrar una parametrización de dicha superficie y calcular su área.

2. Dar, en función de g y sus derivadas parciales, una fórmula para el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de una superficie de ecuación $z=g(x,y)$, con $(x,y)\in D$.

3. Consideremos la curva C, en el plano $y=0$, dada por $z=f(x)$, $0<a\leq x\leq b$.

   (a) Determinar una fórmula para el área, $A(S)$, de la superficie de revolución generada por C al girar en torno al eje OZ.

   (b) Demostrar que $A(S)=2\pi Lh$, donde L es la longitud de la curva C y h la distancia del centro de masas de C (supuesto que la densidad es constante) al eje de rotación.