Hoja de Problemas del Tema 1

Funciones de Varias Variables

1. Identificar y representar gráficamente las siguientes curvas de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $x^2-4x+y^2=0$ (b) $x^2-2x+y^2+4y=0$ (c) $4x^2+9y^2=1$ (d) $y^2=x^2+1$

2. Representar gráficamente las siguientes regiones de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $x^2-4x+y^2 \leq 0$ (b) $xy-4<0$ (c) $4x^2+9y^2 \geq 1$ (d) $y^2 \leq x$

3. Indicar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados o de ninguno de los dos tipos. En cada caso determinar la frontera y realizar una representación gráfica.

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ y<0\}$ (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=1,\ 1<y<2\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x,\ 0 \leq y \leq 2x\}$ (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y-5=0\}$

   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+3y^2 \leq 2\}$ (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+3y^2<2\}$

   (g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-3y^2=2\}$ (h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>x^2\}$

4. Hallar el dominio de definición de las funciones, hacer una representación gráfica aproximada del mismo e indicar si se trata de conjuntos abiertos, cerrados o ni lo uno ni lo otro.

   (a) $z=\ln(x+y)$ (b) $z=\frac{e^{x+y}}{x-y}$ (c) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

   (d) $z=\sqrt{6-(2x+3y)}$ (e) $z=\frac{5}{x^2+y^2-4}$ (f) $z=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln(y^2+1)}$

   (g) $z=\sqrt{1-(x^2-y^2)}$ (h) $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

5. Determinar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$ (b) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

   (c) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ (d) $f(x,y)=\ln(1-xy)$

6. Hallar las curvas de nivel de las superficies:

   (a) $z=x^2+y^2$ (b) $z=4xy$ (c) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ (d) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$

   (e) $z=y-x^2$ (f) $z=x+2y+1$ (g) $z=x^2-y^2$ (h) $z=\frac{x+y}{x-y}$

7. Representar gráficamente las funciones:

   (a) $z = 1 + x^2 + y^2$ (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $z = 5 - (x^2 + y^2)$

   (d) $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ (e) $z = x^2$ (f) $z = 4 - (x + y)$

   (g) $z = y^2 - x^2$ (h) $z = 4x^2 + y^2$

8. Dada la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$, determinar:

   (a) Las trazas de su gráfica (es decir, las curvas que resultan al intersecar la gráfica de la función con los planos XY, XZ, YZ).
   (b) La curva de nivel para $z = 1$.
   (c) Un esbozo de su gráfica.
   (d) La curva que resulta al intersecar su gráfica con el plano $y = 2$.

9. Dada la función $z = \frac{1}{e^{x^2+y^2}}$, se pide:

   (a) Determinar su dominio y especifica si es un conjunto abierto, cerrado o de ninguno de esos dos tipos.
   (b) Determinar, razonadamente, su imagen.
   (c) Calcular y representar las curvas de nivel $z = 1$ y $z = \frac{1}{2}$.
   (d) Esbozar la gráfica de la superficie.

10. Identificar las siguientes cuádricas, analizando si es necesario sus curvas de nivel.

    (a) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12 = 0$
    (b) $x^2 - 4y^2 - 2z = 0$
    (c) $2x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
    (d) $5x^2 + 2y^2 - 6z^2 + 10 = 0$
    (e) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$
    (f) $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
    (g) $x - y^2 - 6z^2 = 0$
    (h) $x^2 + 2x + z^2 = 0$
    (i) $y = z^2$
    (j) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

(k) $y^2 - x^2 - z^2 = 0$

11. Sabiendo que los siguientes límites existen, calcular su valor.

 (a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3-x+y}{4+x-2y}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$ (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$

12. Estudiar la continuidad de las funciones:

 (a) $z = \frac{e^{x+y}}{1+x^2+y^2}$ (b) $z = \operatorname{sen}(x+2y)$ (c) $z = \frac{e^{x-y}}{1-x^2-y^2}$ (d) $z = \frac{3+\cos(x)\operatorname{sen}(y)}{1-x^2}$

13. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{3x^6+4y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

 se pide:

 (a) Calcular el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de las rectas $y = mx$

 (b) Calcular el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la curva $y = x^3$

 (c) Determinar si f es continua en $(0,0)$

14. Demostrar que los siguientes límites no existen.

 (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{y^2+x^4}$

 (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y}{x^6+y^2}$