Hoja de Prácticas tema 2: Derivación de Funciones de Varias Variables

1. Hallar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones:

   (a) $z = x^2 \sin(y^2)$

   (b) $z = e^{x^2+y^2}$

   (c) $\omega = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

   (d) $z = \arctan(xy)$

   (e) $z = \arcsin(x+y)$

   (f) $z = x^y$

   (g) $z = \ln(1+x^2+y^2)$

2. Al intersecar la gráfica de $f(x,y) = x\ln(x+y^2)$ con el plano $y=0$, se obtiene una curva. Calcula la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $P=(1,0,0)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

3. Hallar el vector gradiente de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x,y) = x^3 - y^2e^{x-2}$ en $P=(2,1)$
   b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 2x_2^2 - x_3^4$ en $P=(1,1,3)$
   c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ en $P=(2,2)$

4. Considérense las siguientes funciones de dos variablesy los puntos del dominio que se indican:

   i) $z = x^2+y^2$ puntos: (1,0), ($\sqrt{3}$/2,1/2) y (0,1)
   ii) $z = xy$ puntos: (2,1/2), $(-1/2,-2)$
   iii) $z = y - x^2$ puntos: (0,1), (1,1)

   Se pide en cada caso por separado:

   a. Determinar y representar gráficamente las curvas de nivel que pasan por los puntos indicados.
   b. Calcular el gradiente de las funciones en dichos puntos y determinar las direcciones en las que las correspondientes derivadas direccionales se anulan.
   c. Representar sobre las curvas de nivel y en los puntos dados, a través de vectores, las direcciones de máximo crecimiento, de máximo decrecimiento y de variación nula.

5. En los siguientes ejercicios hallar la derivada direccional de la función dada, en el punto P y la dirección del vector $\vec{v}$:

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2+e^{x-2}$ en $P=(2,1)$ con $\vec{v}=(1,-1)$
   (b) $f(x,y,z) = xy + y^2z + 5z - 1$ en $P=(1,1,1)$ con $\vec{v}=(1,2,1)$
   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en $P=(2,1)$ con $\vec{v}=(-3,4)$
   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - z^2$ en $P=(1,1,2)$ con $\vec{v}=(3,4,0)$

6. En los siguientes ejercicios hallar los valores de las constantes a y b para que:

   (a) La derivada direccional del campo escalar $f(x,y) = 2x^2y - a\dfrac{x}{y}$ en la dirección del vector $\vec{n} = (2,0)$ en el punto $P = (1,-1)$ sea nula.

   (b) La derivada direccional del campo escalar $f(x,y) = xy^3 - ax^2 + 3y^4$ en la dirección del vector $\vec{n} = (3,-4)$ en el punto $P = (-1,1)$ sea igual a 3.

   (c) La derivada direccional del campo escalar $f(x,y,z) = axyz^2 + 3x + y - 4z$ en la dirección del vector $\vec{n} = (-1,1,2)$ en el punto $P = (2,0,-1)$ sea nula.

   (d) La derivada direccional del campo escalar $f(x,y,z) = ax^2y + by^2z + 3z^2x$ en la dirección del vector $\vec{n} = (-2,1,-2)$ en el punto $P = (0,1,-1)$ sea igual a 3.

7. Calcular aproximadamente mediante los diferenciales de las funciones adecuadas, el valor de las expresiones siguientes:

$$(a) \quad \sqrt{(2,01)^3 + (1,01)^3} \qquad (b) \quad \frac{\sqrt[3]{8,01}}{\sqrt{1,99 \times 2,01}}$$

8. El volumen de un cono circular recto, de radio r y altura h, es

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

   Si el resultado de una medición es 2 para el radio y 5 para la altura y se sabe que el error máximo que puede ser cometido en esas medidas es $\frac{1}{8}$, usar una aproximación lineal de la función $V(r,h)$ para obtener una cota superior al error en el volumen inducido por esos errores en las medidas.

9. La potencia disipada por una resistencia R, sometida a una diferencia de potencial V, es

$$P(V,R) = \frac{V^2}{R}.$$

   El resultado de una medición es 10Ω para la resistencia, con una cota superior para el error de $0,5\Omega$, y $12v$ para la diferencia de potencial, con una cota superior para el error de $0,2v$. Utilizar la aproximación lineal de la función $P(V,R)$ para obtener una cota superior del error en el cálculo de la potencia debido a los errores cometidos en las mediciones.

10. Determinar la ecuación del plano tangente y la recta normal a las siguientes superficies en el punto indicado:

    (a) $z = x^2 + y^2$ en $P = (3,4,25)$

    (b) $z = \sin(xy)$ en $(1,\pi,0)$

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en $P = (6,3,2)$

    (d) $xy + yz + xz - 1 = 0$ en $P = (1,1,0)$

    (e) $x^2y^2 + xz - 2y^3 = 10$ en $P = (2,1,4)$

11. (a) Hallar el punto de las siguientes superficies $z = f(x, y)$ en los que el plano tangente es horizontal:

$$i)\ z = 3 - x^2 - y^2 + 6y, \quad ii)\ z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$$

(b) Hallar los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que a la vez son paralelos al plano $\pi : x + 4y + 6z = 0$.

(c) Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$ en el punto $P = (1, 2, -1)$.

12. Encuentra, si los hay, los puntos de la superficie

$$x^2 + 2x + 3y^2 - z^2 + z = 0,$$

en los que el plano tangente es paralelo:

(a) al plano XZ;

(b) al plano de ecuación $x + z = 0$.

13. Justifica que no hay ningún punto de la superficie

$$(x - 1)^2 + y^2 - (z - 2)^2 = 0$$

donde el plano tangente sea paralelo al plano XY:

(a) geométricamente (esboza la superficie, identifícala, y observa que no es posible);

(b) analíticamente (procede como en los ejercicios anteriores, y observa que obtienes una contradicción).

14. a) La superficie de una montaña viene dada por:

$$z = h(x, y) = 4000 - 0'001x^2 - 0'004y^2$$

Si un montañero está en el punto $P = (500, 300, 3390)$ ¿En qué dirección debe moverse para ascender lo más rápido posible?

b) La temperatura T en un punto (x, y) de una placa metálica viene dada por

$$T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2$$

Hallar las direcciones de aumento y disminución más rápido de la temperatura, en el punto $(10, 10)$.

15. La temperatura de una cierta región del espacio está determinada por la función

$$T(x, y, z) = (x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)$$

¿En qué dirección se establece el flujo de calor en el punto $(1, 1, 1)$?

16. Aplicar la regla de la cadena para hallar las derivadas que a continuación se indican:

    (a) $z = e^{xy^2}$ con $x = t\cos t$, $y = t\sin t$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ en $t = \dfrac{\pi}{2}$.

    (b) $\omega = xy + yz + xz$ con $x = s\cos t$, $y = s\sin t$, $z = t$. Hallar $\dfrac{\partial \omega}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ en $s = 2$ y $t = \dfrac{\pi}{3}$.

    (c) $\omega = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$ con $x = s^2 + r^2$, $y = r/s$, $z = 4s^3$. Hallar $\dfrac{\partial \omega}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial \omega}{\partial s}$ en $s = 2$ y $r = 4$.

17. Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ en $(r, \theta) = (2\sqrt{2}, \pi/4)$, donde

$$g(x, y) = \frac{1}{x + y^2}, \quad x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

18. Demostrar que la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z^3 + xz + y = 0$ define una función diferenciable $z = g(x, y)$ en un entorno del punto $(1, 2)$. Calcular el gradiente de g en dicho punto $(1, 2)$.

19. Suponiendo que las relaciones que a continuación se indican definen la variable z como función implícita de x y y, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ utilizando los puntos propoercionados en cada caso:

    (a) $x^2y + z + e^z + 5 = 0$, en el punto $(1, -6, 0)$,

    (b) $x^2 + y^2 + z^2x - ye^z = 5$, en el punto $\sqrt{5}, 1, 0)$,

    (c) $x^z = y^x$, en el punto (e, e, e).