Hoja de Prácticas tema 3: Máximos y Mínimos

1. Hallar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

   (b) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$.

   (c) $f(x,y) = y + x\,\mathrm{sen}\,(y)$.

   (d) $f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

   (f) $f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1$

   (g) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$

2. Hallar los extremos de las funciones siguientes sujetos a las restricciones que se indican.

   (a) $f(x,y,z) = x - y + z$, sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

   (b) $f(x,y) = x$, sujeto a $x^2 + 2y^2 = 3$.

3. Estudiar la existencia de máximos y mínimos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionados por

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ y } x + y = z.$$

4. Usar multiplicadores de Lagrange para probar que el producto de tres números positivos x, y, z, cuya suma tiene el valor prefijado S, es máximo cuando los tres números son iguales.

5. Usar multiplicadores de Lagrange para determinar:

   (a) Las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir (con sus aristas paralelas a los ejes coordenados) en la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

   (b) Las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que se puede inscribir (con sus aristas paralelas a los ejes coordenados) en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6. Descomponer un número positivo a en tres factores positivos ($a = xyz$) de tal forma que la suma de sus inversos, es decir,

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

   sea mínima.

7. Hallar la mínima distancia de los puntos de la superficie $x^2 - yz + x = 2$ al origen.

8. Considera la curva $\mathcal{C}$ definida por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14, \qquad 2x + y - z = 2.$$

   Determina el punto más alto de $\mathcal{C}$ justificando la respuesta.

9. Sea la función $f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$.

   (a) Encontrar sus extremos relativos e indicar el carácter de los mismos.

   (b) Calcular sus posibles extremos condicionados cuando las variables (x,y) están ligadas por la relación $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ definida en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

11. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ definida en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

12. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = xy$ definida en el rectángulo $R = [-1,1] \times [-1,1]$.

13. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 12 - 3x - 2y$ en la región del plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 4$.

14. Probar que la caja rectangular de volumen dado tiene superficie mínima cuando es un cubo.

15. Determinar cuál es la lata cilíndrica (con tapa) de un litro de volumen que se puede fabricar usando la mínima cantidad de metal.