Hoja de Prácticas tema 4: integración múltiple

1. Calcular
$$\iint_D (xy + x^2 + y^2)\, dA$$
en la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 3\}$.

2. Evaluar las siguientes integrales, invirtiendo previamente el ordende integración:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx\, dy$

3. Calcular
$$\iint_D x^3 \cos(xy)\, dx\, dy$$
donde D es la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$.

4. Calcular
$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy,$$
siendo D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(10, 1)$, y $(1, 1)$.

5. Calcular
$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy,$$
donde D es la región limitada por las gráficas $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$.

6. Calcular
$$\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dA,$$
donde D es la región del plano limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

7. Calcular
$$\iint_D ((x-2)^2 + y^2)\, dx\, dy,$$
donde D es el interior del círculo $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

8. Calcular
$$\iint_D \frac{2xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$
donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

9. Calcular el área encerrada entre las curvas $(y-2)^2 = 4x$ y $y + 2 = 2x$.

10. Calcular, utilizando un cambio de variable apropiado, la integral
$$\iint_D 3xy\,dx\,dy,$$
donde D es la región del plano limitada por las curvas $x-2y=0$, $x-2y=-4$, $x+y=4$, $x+y=1$.

11. Calcular
$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}dxdy,$$
donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 1, x^2+y^2\leq 1\}$.

12. Demostrar que:

    (a) El área de una elipse de semiejes a y b es πab.

    (b) El volumen de un elipsoide de semiejes a,b,c es $\dfrac{4\pi}{3}\,abc$.

13. Hallar el volumen del sólido que queda tras taladrar un agujero de radio b a través del centro de una esfera de radio R, con $b<R$.

14. Calcular el volumen exterior a $z^2=x^2+y^2$ e interior a $x^2+y^2+z^2=1$.

15. Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=2+2x+2y$.

16. Determinar el volumen del sólido situado en la región $z\geq 0$ que es interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y al paraboloide $z=x^2+y^2$.

17. Calcular
$$I=\iiint_T x^2yz\,dx\,dy\,dz,$$
siendo T el recinto determinado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y+z=1$.

18. Calcular
$$I=\iiint_T (x^2+y^2)^2\,dx\,dy\,dz,$$
siendo T la región comprendida entre $z=2$ y $x^2+y^2=2z$.

19. Calcular
$$I=\iiint_T \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
siendo T el recinto determinado por las esferas: $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

20. Calcular
$$I=\iiint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$
donde T es el sólido exterior al cono de ecuación $a^2z^2=x^2+y^2$ (con $a>0$) e interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

21. Calcular la temperatura media en el interior del recinto limitado por el plano $z=0$, el cilindro $x^2+y^2=1$ y la rama inferior del cono $(z-2)^2=x^2+y^2$ si la temperatura en cada punto es proporcional a su altura (distancia al plano $z=0$).

`Ejercicios de refuerzo:`

1. Dibuja el dominio de integración y calcula el valor de las siguientes integrales dobles, cambiando el orden de integración.

$$(a) \qquad \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy, \qquad \text{sol: } 1 - \cos 1.$$

$$(b) \qquad \int_0^1 \int_x^1 x e^{y^3}\, dy\, dx, \qquad \text{sol: } \frac{e-1}{6}.$$

2. Calcular

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad \text{sol: } \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/2,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

3. Calcular

$$\iint_D (x-y)\, dx\, dy \qquad \text{sol: } 0.$$

donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

(**Nota:** observa que la función toma valores positivos por debajo de la recta $y = x$, y negativos por encima de la recta $y = x$; de ahí el resultado.)

4. Utilizar la fórmula del cambio de variable para calcular

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy \qquad \text{sol: } \frac{225}{16}.$$

donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\right\}.$$

(**Nota:** utilizar el cambio $u = xy$, $v = y/x$).

5. Calcular

$$\iint e^{9x^2+4y^2}\, dx\, dy \qquad \text{sol: } \frac{\pi(e^{36}-1)}{6}.$$

donde D es el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

6. Calcular

$$\iiint_W z\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{sol: } 294.$$

donde W es la región comprendida entre los planos $z = x + y$ y $z = 3x + 5y$, por encima del rectángulo $D = [0,3] \times [0,2]$.

7. Calcular el volumen de la región W comprendida entre los paraboloides

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad z = 8 - x^2 - y^2$$

   Sol.: 16π

8. Calcular

$$\iiint_W z\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{sol: } 294.$$

   sobre la región W que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ donde $0 \leq z \leq y$. Sol.: π.

9. Hallar el volumen de la región comprendida entre la gráfica de la función

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$

   y el plano xy. Sol.:$\pi/2$.

10. Hallar la integral de $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ sobre la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ definida por $z \geq 2$. Sol.: π.