Hoja de Prácticas tema 5: Integral de línea

1. Parametriza las siguientes curvas en el plano. A partir de esta parametrización calcula el vector tangente unitario y el vector normal principal.

   (a) $y = \exp(x)$ (c) $9x^2 + 16y^2 = 4$ (e) $y = x^2 + 3x$ (g) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

   (b) $4x^2 + y^2 = 1$ (d) $x^2 - y^2 = 2$ (f) $x^2 + y^2 + 2y = 0$ (h) $x^2 + 3y^2 = 1$

2. Determina la longitud de las curvas:

   (a) $\vec{c}(t) = (2t, t^2, \ln(t))$, entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \ln(2))$

   (b) $\vec{c}(t) = \left(t, \frac{4t^{3/2}}{3}, \frac{t}{2}\right)$, con $t \in [0, 2]$

3. Calcula la integral de trayectoria de $f(x, y) = 2xy$ a lo largo de la curva formada por la unión de:

   (a) $\vec{c}_1(t) = (t, t^4)$ entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$,

   (b) El segmento recto, $\vec{c}_2(t)$, entre $(1, 1)$ y $(0, 1)$ (busca la parametrización de $\vec{c}_2(t)$),

   (c) El segmento recto $\vec{c}_3(t)$, entre $(0, 1)$ y $(0, 0)$ (busca la parametrización de $\vec{c}_3(t)$).

4. Representa gráficamente los campos vectoriales:

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (-y, x)$ (b) $\vec{\mathbf{G}}(x, y, z) = (-y, x, z)$

5. Determina el campo gradiente de

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2};$$

   representa algunos valores del vector gradiente sobre puntos de la curva de nivel $f(x, y) = 1$. Representa otras curvas de nivel, y calcula la integral del gradiente de f a lo largo de algún camino que una los puntos $(1, 1)$ y $(2, 2)$.

6. Para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x, y, z)$ evalúa su integral de línea a lo largo de las siguientes curvas:

   (a) $\vec{c}_1(t) = (t, t, t), \quad 0 \le t \le 1$

   (b) $\vec{c}_2(t) = (t^2, 3t, 2t^3), \quad -1 \le t \le 2$

   Si existe un potencial para $\vec{\mathbf{F}}$, repite los cálculos usando este nuevo dato.

7. Cacula

$$\int_C yzdx + xzdy + xydz$$

con C la unión de los dos segmentos rectos de $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$, y de $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$.

8. Sea la curva C, intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y+z=R$.

   (a) Halla la circulación del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ a lo largo de la curva C, recorrida de tal forma que su proyección sobre el plano $z=0$ esté recorrida en sentido positivo.

   (b) Halla la circulación del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(y,z,x)$ a lo largo de la curva C, recorrida de tal forma que su proyección sobre el plano $z=0$ esté recorrida en sentido positivo.

   (c) Calcula

   $$\int_{\mathcal{C}^\star} ydx + 2xdy$$

   donde $\mathcal{C}^\star$ es la proyección de la curva C sobre el plano xy, recorrida en sentido positivo.

9. Calcula las integrales de línea de los siguientes campos vectoriales a lo largo de las curvas especificadas:

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(x^2-2xy, y^2-2xy)$ a lo largo de la parábola $y=x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(1,1)$.

   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(x^2+y^2, x^2-y^2)$ a lo largo de la curva $y=1-|1-x|$, desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

   (c) $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(x+y, x^2-y^2)$ a lo largo the ellipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ orientada positivamente.

   (d) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(x,y,xz-y)$ desde $(1,0,2)$ hasta $(3,4,1)$ a lo largo de un segmento de recta.

10. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, calcula una función potencial y la integral de línea a lo largo de la curva especificada:

    (a) $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(y,x)$, C es el arco de la curva $y=x^4-x^3$ que va desde $(1,0)$ hasta $(2,8)$.

    (b) $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(e^{2y}, 1+2xe^{2y})$, $\sigma(t)=(te^t, 1+t)$, $t\in[0,1]$.

    (c) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(4xe^z, \cos y, 2x^2e^z)$, $\sigma(t)=(t,t^2,t^4)$, $t\in[0,1]$.

11. Halla la integral

    $$\int_C (x^3-3xy^2)\,dx + (3x^2y-y^3)\,dy$$

    donde C es el arco de la circunferencia $x^2+y^2=1$ contenido en el primer cuadrante.

12. Una partícula se mueve desde el punto $(-2,0)$ hasta el $(2,0)$ a lo largo del eje X, y vuelve al punto de partida a lo largo del arco de circunferencia $y=\sqrt{4-x^2}$. Determina el trabajo realizado sobre la partícula por el campo de fuerzas $\vec{\mathbf{F}}(x,y)=(x, x^3+3xy^2)$.

13. Calcula las siguientes integrales de línea. La curva C se considera orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj vista desde $(0, 0, +\infty)$:

(a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$, C es la frontera de la parte del plano $3x + y + z = 3$ contenida en el primer octante.

(b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x^2 y, x^3/3, xy)$, C es la curva intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.