Hoja de Prácticas tema 6: Integral de Superficie

1. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada
$$\Phi(u,v)=(u^2-v^2,u+v,u^2+4v)$$
en $(u,v)=(0,1/2)$

2. Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=25$, y un vector normal en el punto $(5,6,6)$.

3. Determinar el área de la superficie $z=x^2+y^2$ limitada por el plano $z=4$.

4. Sea S la esfera dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$. Determinar el área de la parte de S que es exterior al cono $z^2=x^2+y^2$. Determinar el área de toda la esfera.

5. Calcular las siguientes integrales de superficie:
   (a) $\iint_S (x^2z+y^2z)\,dS$, donde S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.
   (b) $\iint_S xy\,dS$, donde S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos $y=0$ y $x+y=2$.
   (c) $\iint_S xz\,dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.
   (d) $\iint_S xyz\,dS$, donde S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ situada por encima del cono $z^2=x^2+y^2$.

6. Evaluar la integral de superficie del campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=\big(1,1,z(x^2+y^2)^2\big)$ sobre el cilindro $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$.

7. Parametrizar la superficie $S:2x^2+y^2+z^2-8\,x=1$ y calcular la integral de superficie del campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(x,y,z)$ sobre S.

8. Para el campo de velocidades de un fluido $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(x,x^2,yz+1)$ (en metros por segundo) determinar el flujo por segundo a través del cuadrado $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, $z=0$. Repite dicha integral para $z=2$.

9. Sea $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(y,z,xz)$. Evaluar
$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}(x,y,z)\cdot d\vec{\mathbf{S}}$$
sobre la frontera S de las regiones.
   (a) $x^2+y^2\leq z\leq 1$,

(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$.

10. Determinar el flujo de los campos vectoriales dados a través de las superficies correspondientes:

    (a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (e^y, ye^x, x^2y)$, S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situada por encima del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ orientada hacia arriba.

    (b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (-y, x, 3z)$, S es la superficie formada por el paraboloide $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ orientada hacia arriba.

    (c) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (0, y, -z)$, S es la superficie formada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ y el círculo $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$ y está orientada hacia el exterior.

11. Sea S la superficie que consta de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Sea $\vec{\mathbf{E}}$ el campo eléctrico definido por $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Calcular el flujo eléctrico a través de S.

12. Si el campo de velocidades de un fluido es $\vec{\mathbf{V}}(x, y, z) = (2y, x + y, 1)$ (expresado en metros/segundo), determinar los metros cúbicos de fluido que cruzan en un segundo por el cilindro parabólico $y = 2 - x^2$, para $0 \leq z \leq 2$, $y \geq 0$.

13. Calcular el flujo del campo vectorial través de la superficie dada (si la superficie es cerrada, se considera orientada hacia el exterior):

    (a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xy, y^2 + xz, \sin(xy))$, S es la frontera de la región limitada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$.

    (b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$, S es la superficie del cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

    (c) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z, y^3 + z \sin x, 3z)$, S es la frontera de la región limitada por las semiesferas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.