Hoja de Prácticas tema 7: Análisis vectorial

1. Representar algunas líneas de flujo de los campos vectoriales

   (a) $\vec{\mathbf{F}}_1(x,y) = (y,-x)$
   (b) $\vec{\mathbf{F}}_2(x,y) = (x,-y)$
   (c) $\vec{\mathbf{F}}_3(x,y) = (x,x^2)$
   (d) $\vec{\mathbf{F}}_4(x,y) = (x+y,1)$
   (e) $\vec{\mathbf{F}}_5(x,y) = (x^2,y^2)$
   (f) $\vec{\mathbf{F}}_6(x,y) = (x^3,2y)$

   y determinar su divergencia, estudiando su signo en diversas regiones del plano. Añadiendo una tercera componente nula, calcular los rotacionales e interpretar los resultados.

2. Calcular la divergencia y el rotacional de

   (a) $\vec{\mathbf{F}}_1(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\,(3,4,5)$
   (b) $\vec{\mathbf{F}}_2(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,(yz,-xz,xy)$
   (c) $\vec{\mathbf{F}}_3(x,y,z) = \big(3x^2y, x^3+y^3, z\big)$.

3. En el ejercicio anterior, determinar en su caso un campo escalar cuyo gradiente sea el campo vectorial de rotacional nulo.

4. Dados $f(x,y,z) = xyz^2$ y $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy,yz,zy)$, calcular $\nabla(f)$ y $\nabla\times\vec{\mathbf{F}}$. Calcular de forma directa, y también mediante la correspondiente identidad vectorial, $\nabla\times(f\vec{\mathbf{F}})$.

5. Comprobar que el campo $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ es irrotacional y calcular su integral de línea desde $(1,1,1)$ hasta $(1,2,4)$ a lo largo de dos curvas diferentes.

6. Calcular el flujo del campo vectorial través de la superficie dada (si la superficie es cerrada, se considera orientada hacia el exterior):

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (xy, y^2+e^{xz^2}, \sin(xy))$, S es la frontera de la región limitada por el cilindro parabólico $z = 1-x^2$ y los planos $z=0$, $y=0$ y $y+z=2$.
   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (3y^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$, S es la superficie del cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$.
   (c) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x^3+y\sin z, y^3+z\sin x, 3z)$, S es la frontera de la región limitada por las semiesferas $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ y el plano $z=0$.
   (d) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (x, 2z^3, 3y^2+x)$, S es el paraboloide $z=x^2+y^2$, $z<1$, con orientación hacia arriba.
   (e) Dado el campo eléctrico

   $$\vec{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

   determinar su flujo a través del elipsoide $4x^2+9y^2+6z^2=36$.

7. Evaluar sobre la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$, la integral de superficie del rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$.

8. Para la superficie S definida por la unión de $S_1 : x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ y $S_2 : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1$ (S es un cilindro con tapa semiesférica) calcular la integral

$$\iint_S (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot d\mathbf{S}$$

con $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

9. Verificar el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (z - y, 1, x)$ y la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leq 1\}.$$

10. Calcular las siguientes integrales de línea utilizando el teorema de Stokes. La curva C se considera orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj vista desde $(0, 0, +\infty)$:

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$, C es la frontera de la parte del plano $3x + y + z = 3$ contenida en el primer octante.

   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (2z, 4x, 5y)$, C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + 4$.

   (c) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x^2y, x^3/3, xy)$, C es la curva intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (d) $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2)$, C es la frontera de la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ contenida en el primer octante.