Universidad Loyola Andalucía – `Convocatoria ordinaria`

Titulación: ____________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **13/12/2024**

Apellidos: ______________________________	Nombre: ____________________

INSTRUCCIONES – Recuperación Parcial Temas 1 y 2

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Ejercicios distintos deben realizarse en hojas distintas.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$2 puntos$\rangle$ Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule el valor de la expresión $\quad A^{-1} + AB^t + 2\mathbb{I}_3, \quad$ donde $\mathbb{I}_3$ la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 2. $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Resuelva la ecuación matricial $\quad X(A + \mathbb{I}) + C = A + XB.$

Indique la condición que ha de cumplirse para que sea posible resolver la ecuación (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden).

Ejercicio 3. $\langle$3'5 puntos$\rangle$ Dado el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.

(b) Use el Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema de ecuaciones.

(c) Encuentre, si existe(n), la solución o soluciones del sistema.

Ejercicio 4. $\langle$3 puntos$\rangle$ Una empresa produce tres productos **A**, **B** y **C**, que procesa en tres departamentos. El tiempo en horas requerido para procesar una unidad de cada producto en cada departamento está dado por:

$$\begin{array}{l} \text{Departamento 1} \\ \text{Departamento 2} \\ \text{Departamento 3} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Se dispone en el primer departamento de 880 horas, en el segundo de 450 horas y en el tercer departamento de 1100 horas.

(a) Formule el sistema de ecuaciones lineales.

(b) Escriba la ecuación matricial del sistema y demuestre que el sistema tiene solución única.

(c) ¿Cuántas unidades de cada producto deberían producirse con objeto de emplear todo el tiempo disponible las máquinas?

Universidad Loyola Andalucía – Convocatoria ordinaria

Titulación: ______________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **13/12/2024**

Apellidos:______________________ Nombre:______________________

INSTRUCCIONES – Recuperación Parcial Temas 3 y 4

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$2 puntos$\rangle$ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ x + 3y - z &= 1 \\ \alpha x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

(a) Expréselo en forma vectorial y halle para qué valores del parámetro α los vectores definidos por las columnas de la matriz de coeficientes del sistema forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$.

(b) Halle el vector que tiene coordenadas $(1, -2, 3)$ en la base formada por los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. $\langle$1 punto$\rangle$ Dado S el conjunto de los vectores del primer y tercer cuadrante del plano

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } xy \geq 0 \right\}.$$

¿Es S un subespacio vectorial? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. $\langle$2 puntos$\rangle$ Sean $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule la matriz P del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, y las ecuaciones del cambio de base correspondientes.

(b) Halle Q la matrix del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(c) ¿Qué relación existe entre P y Q?.

Ejercicio 4. $\langle$5 puntos$\rangle$ Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

(a) Calcule los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores).

(b) ¿Es la matriz B diagonalizable? Justifique su respuesta.

(c) En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P y la matriz diagonal D correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices B, P y D.

(d) Utilice la diagonalización de la matriz B para hallar B^n (la potencia n-ésima de la matriz B).

	Universidad Loyola Andalucía – `Convocatoria ordinaria`
	Titulación: ______________________________
	Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**
	Curso: **primero** Fecha: **13/12/2024**

Apellidos:______________________________ Nombre:____________________

INSTRUCCIONES – Parcial Tema 5

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$3 puntos$\rangle$ Dados los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|^2$$

(b) Compruebe que se cumple la desigualdad triangular

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Ejercicio 2. $\langle$4 puntos$\rangle$ Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Halle los valores de α para que los vectores formen una base ortogonal.

(b) ¿Para qué valores del parámetro α la base es ortonormal? Determine una base ortonormal.

(c) ¿Cuál es la inversa de la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal?

Ejercicio 3. $\langle$3 puntos$\rangle$ Encuentre un vector unitario $\vec{x}$ que sea ortogonal al subespacio S generado por los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$