Universidad Loyola Andalucía – Convocatoria extraordinaria

Titulación: _____

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **17/01/2025**

Apellidos:_____ Nombre:_____

INSTRUCCIONES – Recuperación Parcial Temas 1 y 2

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. ⟨2 puntos⟩ Calcule el valor de la expresión $A^{-1}(B^t - 2\mathbb{I}_3)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbb{I}_3$ la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 2. ⟨1'5 puntos⟩ Resuelva la ecuación matricial $(A - \mathbb{I})X + BX = A + CX$.

Indique la condición que ha de cumplirse para que sea posible resolver la ecuación (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden).

Ejercicio 3. ⟨3'5 puntos⟩ Dado el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.

(b) Use el Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema de ecuaciones.

(c) Encuentre, si existe(n), la solución o soluciones del sistema.

Ejercicio 4. ⟨3 puntos⟩ En una fábrica se fabrican tres productos diferentes **A**, **B** y **C**. En la tabla adjunta se resumen las necesidades de horas de trabajo y materias primas necesarias para fabricar una unidad de cada producto. Cada mes se cuenta con un total de 1450 horas de trabajo y 7500 kilos de materias primas. Por otra parte, se necesita producir un total de 650 unidades mensuales.

	Producto		
	A	**B**	**C**
Horas de trabajo/unidad	2	2	5
Kilos de materias primas/unidad	15	10	20

(a) Formule el sistema de ecuaciones lineales.

(b) Escriba la ecuación matricial del sistema y demuestre que el sistema tiene solución única.

(c) Determine las cantidades que puede producir de cada producto sabiendo que se aprovechan al máximo las disponibilidades mensuales de trabajo y de materias primas.

Universidad Loyola Andalucía – Convocatoria extraordinaria

Titulación: _____

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **17/01/2025**

Apellidos:_____ Nombre:_____

INSTRUCCIONES – Recuperación Parcial Temas 3 y 4

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. ⟨3 puntos⟩ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + \alpha y &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) Expréselo en forma vectorial.

(b) Determine para qué valores del parámetro α los vectores definidos por las columnas de la matriz de coeficientes del sistema forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

(c) Halle el vector que tiene coordenadas $(1, -2, 3)$ en la base formada por

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Halle las coordenadas del vector $(2, 5, 4)^T$ en la base anterior.

Ejercicio 2. ⟨2 puntos⟩ Sean $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule la matriz P del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, y las ecuaciones del cambio de base correspondientes.

(b) Halle Q la matrix del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(c) Use la matriz del cambio de base para hallar las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ del vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Ejercicio 3. ⟨5 puntos⟩ Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

(a) Calcule los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores).

(b) ¿Es la matriz B diagonalizable? Justifique su respuesta.

(c) En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P y la matriz diagonal D correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices B, P y D.

(d) Utilice la diagonalización de la matriz B para hallar B^n.

Universidad Loyola Andalucía – Convocatoria extraordinaria

Titulación: _____

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **17/01/2025**

Apellidos:_____ Nombre:_____

INSTRUCCIONES – Parcial Tema 5

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. ⟨3 puntos⟩ Dados los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule el valor de la siguiente expresión:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|^2$$

(b) Normalice los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejercicio 2. ⟨4 puntos⟩ Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que los vectores forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(b) Halle los valores del parámetro α para que la base sea ortonormal.

(c) ¿Cuál es la inversa de la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal?

Ejercicio 3. ⟨3 puntos⟩ Encuentre un vector unitario $\vec{x}$ que sea ortogonal al subespacio S generado por los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$