Universidad Loyola Andalucía – `Primer Parcial. Temas 1 y 2`

Titulación: ____________________________

Asignatura: **Cálculo/Matemáticas II**

Curso: **primero** Fecha: **19/05/2025**

Apellidos:______________________________ Nombre:________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$3 puntos$\rangle$ El consumo energético anual de la Empresa $Logya$ aumenta un $1'5\%$ cada año, mientras que el de la Empresa $EnerSol$ aumenta de forma lineal en 240 kWh al año. Si el consumo inicial de ambas empresas es de 12000 kWh. Se pide:

(a) Expresar el consumo total dado por la suma del consumo de ambas empresas tras t años.

(b) Indique cuál de las dos empresas tiene un mayor consumo a largo plazo.

(c) Calcular el número de años que han de pasar para que el consumo inicial de cada empresa aumente un 20%.

Solución desarrollada

Empleando los datos que se nos proporciona, está claro que

(a) $L(t) = 12000(1'015)^t$, $E(t) = 15000 - 240t$; por lo tanto la respuesta es

$$L(t) + E(t) = 12000(1'015)^t + 15000 - 240t.$$

(b) Dado que $L(t)$ es exponencial con base > 1 entonces, a empresa $Logya$ es la que crece más a largo plazo.

(c) Si aumentan el 20%, entonces en el primer caso se tiene trás simplificar

$$1'2 = (1'015)^t \;\Rightarrow\; 1'2 \approx 1 + 0'015t \;\Rightarrow\; t = 13'33 \text{ años}.$$

En el segundo caso

$$24000 = 240t \;\Rightarrow\; t = 10 \text{ años}.$$

Ejercicio 2. $\langle 2$ puntos$\rangle$ Halle los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} a + e^x & x \leq 0 \\ x^2 + \dfrac{b}{x+1} & 0 < x < 1 \\ x + \sqrt{x} & 1 \leq x. \end{cases}$$

Solución desarrollada

Las tres funciones de cada parte son continuas en sus intervalos, la segunda tiene un problema en $x = -1$ pero este punto no está en el intervalo $(0, 1)$ y la tercera está definida para $x \geq 0$ (raíz cuadradra) que tampoco es un problema en este caso.

Solo necesitamos ver qué sucede en los cambios de definición:

$$f(0^-) = a + e^0, \ f(0^+) = 0 + \frac{b}{1}, \ f(1^-) = 1 + \frac{b}{2}, \ f(1^+) = 1 + 1.$$

Por tanto para que f sea continua

$$a + 1 = b, \quad 1 + \frac{b}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Ejercicio 3. $\langle 3$ puntos$\rangle$ Dada la función $f(x) = x^2 + 2\log(x+1) + 1$. Determine:

(a) La función lineal que aproxima a la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

(b) Use la aproximación lineal obtenida para calcular el valor aproximado de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

(c) Sabiendo que $\log(2) \approx 0'301$. Calcule el error cometido en la aproximación.

Solución desarrollada

(a) Aplicando la teoría se tiene dicha aproximación es

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0).$$

En este caso $f(0) = 0^2 + 2\log(1) + 1 = 1$, además

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{2}{2} = 1.$$

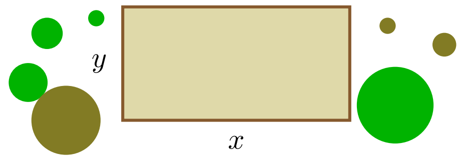
Por lo tanto $f(x) \approx 1 + 2x$.

(b) Empleando lo anterior se tiene $f(1) \approx 3$.

(c) Sabiendo que $\log 2 \approx 0'301$ entonces el error cometido será

$$E = |f(1) - 3| = |1 + 2\log 2 + 1 - 3| = |2(0'301) - 1| = 0'398$$

Ejercicio 4. $\langle 2 \text{ puntos} \rangle$ Un agricultor quiere cercar un terreno con una valla rectangular. Determine cuántos metros de valla necesita comprar sabiendo que el rectángulo tiene un área de 100 m^2 y su perímetro es mínimo.



Solución desarrollada

Usando los datos del problema se tiene que el área del recinto será 100, es decir, $xy = 100$, y como el perímetro de la valla es $2x + 2y$ el cual debemos optimizar, entonces

$$P(x, y) = 2x + 2y = 2x + \frac{200}{x}$$

en este caso se tiene

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x} \;\Rightarrow\; P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} \;\Rightarrow\; P''(x) = \frac{400}{x^3}.$$

Luego los puntos críticos son $x_0 = \pm 100$ luego donde $x_0 = 10$ es mínimo global $[P''(x_0) > 0]$ (-10 se descarta al ser negativo). Para este valor $y_0 = 100/10 = 10$ luego la cantidad de valla que necesito es de 40 metros.

Universidad Loyola Andalucía – `Segundo Parcial`

Titulación: ______________________________

Asignatura: **Cálculo/Matemáticas II**

Curso: **primero** Fecha: **19/05/2025**

Apellidos:______________________________ Nombre:____________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$2 puntos$\rangle$ Considere la función $D(x,y) = 3x^{-2/3}y^{1/3}$. Se pide:

(a) Calcule las derivadas parciles de primer orden de la función.

(b) Justifique si la función es creciente o decreciente con respecto a la variable x cuando la variable y se mantiene constante.

(c) Halle el valor de las derivadas parciales de segundo orden: $\dfrac{\partial^2 D}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 D}{\partial y^2}$.

Solución desarrollada

(a) En este caso las derivadas parciales son

$$D_x = -2x^{-5/3}y^{1/3}, \quad D_y = x^{-2/3}y^{-2/3}.$$

(b) Es decreciente pues $D_x = -2x^{-5/3}y^{1/3} < 0$.

(c) En este caso

$$D_{xx} = \frac{10}{3}x^{-8/3}y^{1/3}, \quad D_{yy} = \frac{-2}{3}x^{-2/3}y^{-5/3}.$$

Ejercicio 2. $\langle$2 puntos$\rangle$ Calcule las derivadas parciales de primer orden de la función:

$$f(x,y) = (2+\log x)y^3 + (y+1)e^{x^3} + \frac{1}{x-y}.$$

Solución desarrollada

En este caso las derivadas parciales son

$$f_x = \frac{y^3}{x} + 3x^2(y+1)e^{x^3} - \frac{1}{(x-y)^2}, \quad f_y = 3(2+\log x)y^2 + e^{x^3} + \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Ejercicio 3. ⟨2 puntos⟩ En un ecosistema, hay dos especies de animales, la especie Saltimbanqui y la especie Risueña. La población de la especie Saltimbanqui se ve afectada por la disponibilidad de alimento (x) y la cantidad de refugios (y) en su hábitat. Se sabe que la población de esa especie (Saltimbanqui) viene dada por

$$P_{\mathsf{S}}(x,y) = \left(x^2 + y^{1/3}\right)^2 \quad \text{individuos/mes.}$$

Se estima que, dentro de t meses, la disponibilidad de alimento será $x = 2\sqrt{t} + t$ (en Kg) y la cantidad de refugios será $y = e^{-t} + \dfrac{1}{t}$ (en unidades). ¿Cuál será la tasa de cambio de la población P_{S} con respecto al tiempo dentro de 3 meses? ¿Crecerá o decrecerá la población pasados 3 meses?

Solución desarrollada

Empleando la regla de la cadena se tiene

$$P_{\mathsf{S}t} = P_{\mathsf{S}x}x_t + P_{\mathsf{S}y}y_t.$$

Derivando cada término se tiene

$$\left(2(x^2 + y^{1/3})2x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right) + \left(2(x^2 + y^{1/3})\frac{1}{3}y^{-2/3}\right)\left(-e^{-t} - \frac{1}{t^2}\right)$$

Sustituimos en $t = 3$ obteniendo

$$x = x(3) = 2\sqrt{3} + 3, \quad y = y(3) = e^{-3} + \frac{1}{3},$$

es decir el resultado final es

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{S}t}|_{t=3} =& 2\left((2\sqrt{3}+3)^2 + \left(e^{-3} + \frac{1}{3}\right)^{1/3}\right)\left(2(2\sqrt{3}+3)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{3}\left(e^{-3} + \frac{1}{3}\right)^{-2/3}\left(-e^{-3} - \frac{1}{9}\right)\right). \end{aligned}$$

La función es creciente pues x^2 crece más rápido que $y^{1/3}$; aunque puede comprobarse numéricamente.

Ejercicio 4. ⟨2 puntos⟩ Dada la función $f(x,y) = \log(y + e^{-x})$.

(a) Determine el vector gradiente de la función $f(x,y)$ en (x,y).

(b) Halle la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(0,1)$ según la dirección dada por el vector unitario $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución desarrollada

(a) La función es derivable pues es profucto de polinomios y exponenciales. De hecho

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-e^{-x}}{y+e^{-x}}, \frac{1}{y+e^{-x}}\right).$$

(b) Siguiendo la teoría

$$D_{\vec{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

y operando se tiene

$$D_{\vec{v}} f(0,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 5. ⟨2 puntos⟩ Una empresa de alimentación produce dos tipos de snacks, cuyas funciones de demanda son: $p = 20 - 2x$, $q = 15 - y$, donde x e y son las cantidades producidas de cada tipo de snack, siendo p y q son los precios de venta unitarios de cada uno, respectivamente. Sabiendo que la función de costes está dada por: $C(x,y) = 4x + 3y + 40$, determine las cantidades x e y producidas para que la función de beneficio sea máxima y halle el beneficio máximo obtenido.

Solución desarrollada

El beneficio es la diferencia de ingresos menos costes, por lo tanto

$$B(x,y) = px + qy - C(x,y) = 20x - 2x^2 + 15y - y^2 - 4x - 3y - 40$$

El gradiente de la función es

$$\nabla B(x,y) = (20 - 4x - 4, 15 - 2y - 3)$$

que se anula en $x = 4$, e $y = 6$. Y dado que la matriz Hessiana de esta función es

$$HB(x.y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces $(4,6)$ es un máximo local pues $D > 0$ y $f_{xx} < 0$. Además en este caso $B(4,6) = 28$ u.m.

Universidad Loyola Andalucía – `Tercer Parcial`

Titulación: ____________________________

Asignatura: **Cálculo/Matemáticas II**

Curso: **primero** Fecha: **19/05/2025**

Apellidos:____________________________ Nombre:__________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$5 puntos$\rangle$ El beneficio marginal que se obtiene al vender x unidades de un determinado servicio digital está dado por la función:

$$12\sqrt{x} + \frac{3}{(x+2)^2}$$

Calcule la función de beneficio que se obtiene sabiendo que si se venden 16 unidades hay unas pérdidas de 80 unidades monetarias.
Información: El beneficio marginal es la derivada del beneficio.

Solución desarrollada

En este caso

$$B(x) = \int 12\sqrt{x} + \frac{3}{(x+2)^2}\, dx = 8x^{3/2} - \frac{3}{x+2} + C$$

Dado que $B(16) = -80$, entonces

$$-80 = 8*16^{3/2} - \frac{3}{18} + C \quad \Rightarrow \quad C = -80 - 64*8 + \frac{1}{6} = -592 + \frac{1}{6} = -\frac{3551}{6}$$

si lo aproximamos se tiene

$$C \approx -591'83, \quad \Rightarrow \quad B(x) = 8x^{3/2} - \frac{3}{x+2} - \frac{3551}{6}.$$

Ejercicio 2. ⟨5 puntos⟩ En una empresa de distribución de fruta, el precio por kilogramo de manzanas sigue la función:

$$P(t) = 4\sqrt[3]{t} + \frac{2}{t+1} + 8 \quad \text{euros/kg}$$

donde t representa el número de semanas desde el inicio de la temporada. ¿Cuál fue el precio medio por kilogramo durante las 8 primeras semanas?

Solución desarrollada

Dicho valor medio será

$$V_M = \frac{\displaystyle\int_0^8 4\sqrt[3]{t} + \frac{2}{t+1} + 8 \; dt}{8} = \frac{1}{8}\left(3t^{4/3} + 2\log(t+1) + 8t\Big|_{t=0}^{t=8}\right.\,.$$

operando se tiene

$$V_M = \frac{1}{8}\Big((3 * 8^{4/3} + 2\log 9 + 64) - (0)\Big) = \frac{112 + 2\log 9}{8} = 14 + \frac{\log 9}{4}.$$