Universidad Loyola Andalucía – `Segundo Parcial. Temas 3 y 4`

Titulación: ______________________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **28/11/2024**

Apellidos:______________________________ Nombre:____________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Ejercicios distintos deben realizarse en hojas distintas.
- Cada hoja entregada debe tener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. ⟨2 puntos⟩ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 11 \\ 2x - \alpha z &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

a) Expréselo en forma vectorial.

b) Halle para qué valores del parámetro α los vectores definidos por las columnas de la matriz de coeficientes del sistema forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$.

c) Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base formada por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, donde

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. ⟨2 puntos⟩ Sean $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, donde:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule la matriz P del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y las ecuaciones del cambio de base.

b) Halle Q la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$

c) Qué relación existe entre P y Q.

Ejercicio 3. ⟨3 puntos⟩ Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores).

b) ¿Es la matriz B diagonalizable? Justifique su respuesta.

c) En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P y la matriz diagonal D correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices B, P y D.

Ejercicio 4. ⟨3 punto⟩ Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Encuentre los autovalores y autovectores de A.

b) Utilice la diagonalización de la matriz A para hallar A^n (la potencia n-ésima de la matriz A.

Universidad Loyola Andalucía – `Recuperación Primer Parcial`

Titulación: ____________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **28/11/2024**

Apellidos:____________________ Nombre:____________________

Ejercicio 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcule el valor de la expresión: $A^2 - 2BB^t + \mathbb{I}_3$, donde $\mathbb{I}_3$ la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 2. Resuelva la siguiente ecuación matricial:

$$AX - B(X + B) = B^2 + X.$$

Indique la condición que ha de cumplirse para que sea posible (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden).

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.

b) Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema de ecuaciones.

c) Encuentre (si existen) la solución o soluciones del sistema.