**Universidad Loyola Andalucía** – `Segundo Parcial. Temas 3 y 4`

Titulación: ________________________________

Asignatura: **Cálculo/Matemáticas II**

Curso: **primero** Fecha: **28/04/2025**

Apellidos:______________________________ Nombre:____________________

**INSTRUCCIONES**

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Ejercicios distintos deben realizarse en hojas distintas.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

**Ejercicio 1.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Consideremos la función $f(x,y) = 3x^{1/3}y^{2/3}$. Se pide:

(a) Halle el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(125, 64)$.

(b) Justifique si la función $z = f(x,y)$ es creciente o decreciente con respecto a $y$ cuando la variable $x$ permanece constante.

(c) ¿Qué ocurre con $z = f(x,y)$ si las variables $x$ e $y$ se duplican? Justifique su respuesta.

(d) Halle el valor de la variable $x$ para que el punto $(x, 625)$ pertenezca a la curva de nivel $z = 300$.

**Ejercicio 2.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Calcule las derivadas parciales de primer orden $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x\ \mathrm{sen}(y^4) + (3x+y^2)^{1/2}$, (b) $f(x,y) = x2^{y^3}$.

**Ejercicio 3.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Dada la función $f(x,y) = \log(x^2+y^2) - 4x^2 + 4y^2$. Calcule y simplifique el valor de la expresión:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Ejercicio 4.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ En un ecosistema, hay dos especies de animales, la especie Saltimbanqui y la especie Risueña. La población de la especie Saltimbanqui se ve afectada por la disponibilidad de alimento (F) y la cantidad de refugios (R) en su hábitat. Se sabe que la población de esa especie (Saltimbanqui) viene dada por

$$P_{\mathsf{S}}(F,R) = 200 - 20F^{1/2} + R^2 \quad \text{individuos/mes}.$$

Se estima que, dentro de $t$ meses, la disponibilidad de alimento será $F = 3 + 2\sqrt{t}$ (en Kg) y la cantidad de refugios será $R = 2 + \dfrac{3}{t}$ (en unidades). ¿Cuál será la tasa de cambio de la población $P_{\mathsf{S}}$ con respecto al tiempo dentro de 9 meses? Emplee la regla de la cadena y exprese el resultado como una fracción.

**Ejercicio 5.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Dada la función $f(x,y) = xe^{x+y^2}$.

(a) Determine el vector gradiente de la función $f(x,y)$ en $(x,y)$.

(b) ¿Existe algún punto $(x,y)$ en el que el gradiente de $f(x,y)$ sea $(0,0)$?

(c) Halle la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(0,1)$ según la dirección dada por el vector unitario $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**Ejercicio 6.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Calcule el único punto crítico de la función: $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 5$. Determine si se trata de un máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

**Ejercicio 7.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Un entrenador de fútbol planea dos tipos de ejercicios para mejorar el rendimiento de sus jugadores durante los entrenamientos. El primer ejercicio se centra en la precisión de los pases y el segundo en la puntería en el tiro. Si se realizan $x$ repeticiones del ejercicio de pases e $y$ repeticiones del ejercicio de tiros, se ha observado que la eficacia en la precisión de los pases se comporta según la función: $E_1 = 10 - x$, y la eficacia en la puntería en el tiro según $E_2 = 18 - 2y$.

Sabiendo que el realizar estos ejercicios genera un rendimiento en los jugadores, que viene dado por la función:

$$R(x,y) = 4x^2 + y^2 + 25.$$

Determine las cantidades $x$ e $y$ de modo que se minimice el nivel de desgaste y estres $N(x,y)$, que es la diferencia entre el rendimiento y la eficacia, de sus jugadores. Halle dicho nivel mínimo.

**Ejercicio 8.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Una empresa fabrica dos tipos de mochilas. El coste promedio de producir una mochila del primer tipo es de 15 u.m. y de 8 u.m. para el segundo tipo. Las cantidades de mochilas que pueden venderse están dadas por las funciones de demanda conjuntas $x = 400 - 20p$, $y = 30 + 10p - 5q$, donde $p$ y $q$ son los precios de venta de cada tipo de mochila. Se pide:

(a) Determinar los precios de venta para maximizar el beneficio.

(b) Calcular el beneficio máximo obtenido.

**Universidad Loyola Andalucía** – `Recuperación Primer Parcial`

Titulación: ____________________

Asignatura: **Cálculo/Matemáticas II**

Curso: **primero** Fecha: **28/04/2025**

Apellidos:____________________ Nombre:____________________

**INSTRUCCIONES**

- En este examen no está permitido el uso de calculadora.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

**Ejercicio 1.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Un club deportivo tiene un coste que depende de la duración del contrato en meses:

- Para contratos de $1$ a $6$ meses, el coste es de $40$ euros por mes más una cuota inicial de inscripción de 50 euros.
- Para contratos superiores a 6 meses y hasta los 12 meses, el coste es de 30 euros por mes, más una cuota inicial de inscripción de $40$ euros.
- Para contratos de más de 12 meses, el coste es de $20$ euros por mes, sin cuota inicial.

Exprese el coste $C$ del gimnasio como una función de la duración del contrato $t$ en meses

**Ejercicio 2.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Halle los valores de las constantes $a$ y $b$ para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \ x \leq 0 \\ x - b, \text{ si } \ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x+a}{x^2+b}, \text{ si } \ 2 < x \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** $\langle 2$ puntos$\rangle$ El ingreso total mensual de un fabricante es

$$R(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x}{x+2} \qquad \text{euros}$$

cuando se producen x unidades durante el mes. En la actualidad, el fabricante produce $400$ unidades al mes y planea disminuir la producción mensual en $1'5$ unidades. Aplique la **aproximación con la diferencial** para calcular el cambio del ingreso total mensual como resultado de esta disminución.

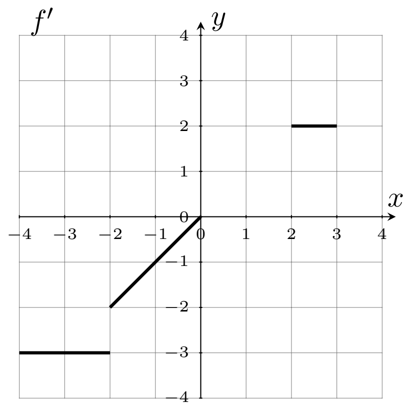
**Ejercicio 4.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Empleando optimización encuentre la pareja de enteros cuya diferencia sea 100 y su producto sea mínimo. Justifique su respuesta

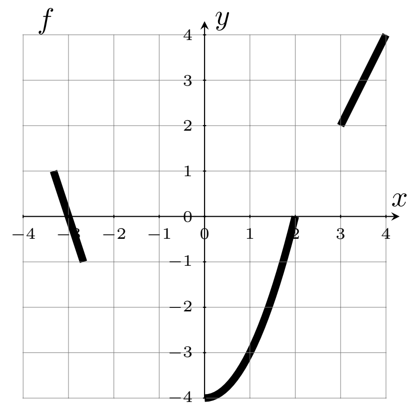
**Ejercicio 5.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Halle los valores de $\alpha$ y $\beta$ para que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$ pase por el punto $(1, 2)$ y la recta tangente a la curva en dicho punto sea $x + y = 3$.

**Ejercicio 6.** $\langle 1$ punto$\rangle$ Calcule las siguientes derivadas:

$$a)\ y = x^x, \quad b)\ y = \log\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right).$$

**Ejercicio 7.** $\langle 1'5$ puntos$\rangle$ Dada cierta función $y = f(x)$, se nos proporcionan parcialmente las gráficas de $f'$ y de $f$ en la primera y segunda rejilla respectivamente:




(a) Complete ambas gráficas para que la función sea lo más continua posible.

(b) Justifique si puede ser $y = f(x)$ en continua en $x = -2$.