Universidad Loyola Andalucía
Titulación: Grado en Datos y Analítica de Negocios
Asignatura: Álgebra
Práctica 1. Cálculo del polinomio de grado $n$ que pasa por $n+1$ puntos

## Introducción

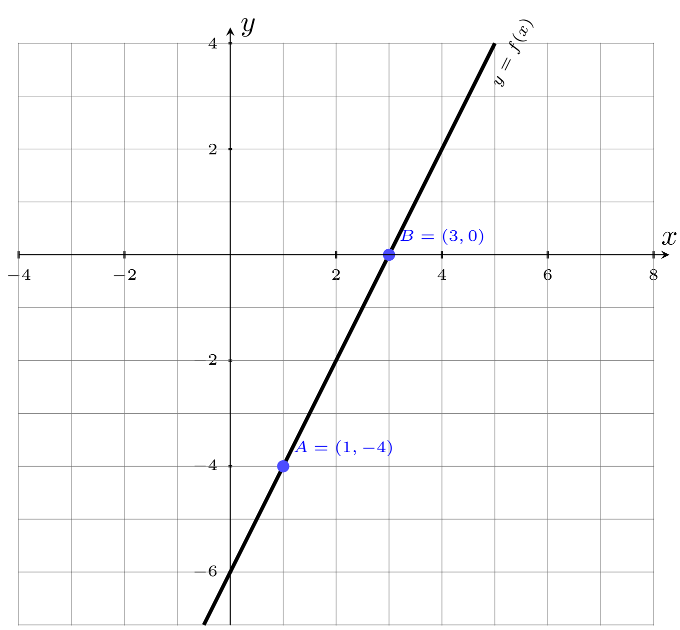
La siguiente práctica tiene como **objetivo** *aplicar lo aprendido en el Tema 1* acerca de las ecuaciones lineales a la resolución del siguiente problema:
Consideremos $n+1$ puntos en el plano ($\mathbb{R}^2$) y tratemos de encontrar un polinomio de grado $n$ (uno menos que el número de puntos) que pasa exactamente por los puntos dados.

### Recta que pasa por dos puntos

Comencemos por el caso más sencillo. Sabemos que dados dos puntos del plano $A$ y B existe una única recta que pasa por ellos. Es decir, existe una única función lineal (polinomio de primer grado) que pasa por dos puntos. Veamos un ejemplo: Si $A=(1,-4)$ y $B=(3,0)$ son dos puntos del plano, nos planteamos encontrar la función lineal $f(x)=ax+b$ que pasa por los puntos $A$ y $B$. Esta condición es equivalente al sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas , $a$ y $b$, siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=-4 \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-4 \\ 3a+b=0 \end{array}\right\},$$

cuya solución es $a=2$, $b=-6$. De esta forma, la función $f(x)=2x-6$ es la función lineal buscada.




### Parábola que pasa por tres puntos

Realizando un razonamiento similar es posible encontrar la función polinómica de segundo grado (parábola) que pasa por tres puntos dados que no estén alineados.

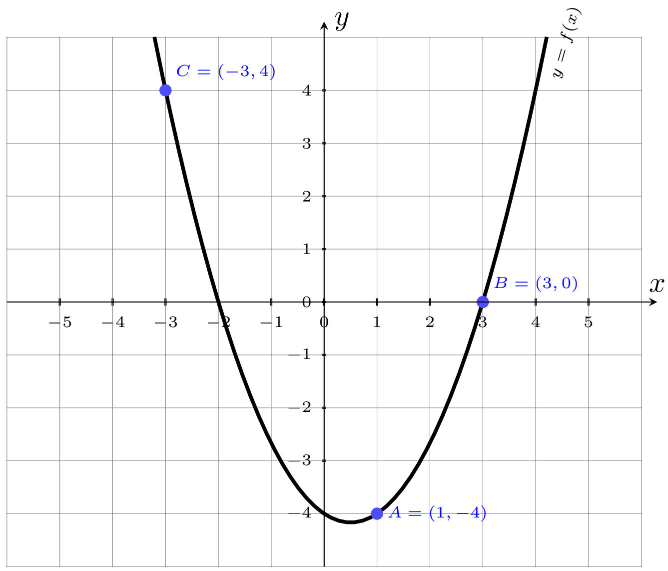
Considere los puntos $A=(1,-4)$ , $B=(3,0)$, $C=(-3,4)$. Para encontrar la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los tres puntos se sigue el mismo procedimiento:

a) Expresamos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente. En este caso se trata de un sistema con tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, $a$, $b$ y $c$:

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=-4 \\ f(3)=0 \\ f(-3)=4 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=-4 \\ 9a+3b+c=0 \\ 9a-2b+c=4 \end{array}\right\},$$

b) El cual es un sistema compatible determinado cuya única solución viene dada por: $a = 2/3 \approx 0.67$, $b = -2/3 \approx -0.67$ y $c = -4$.

c) Así, el polinomio de grado dos que pasa por los tres puntos es $y = 0.67x^2 - 0.67x - 4$.




### Caso general

El proceso que hemos seguido anteriormente para los casos $n = 2$ y $n = 3$ puede ser realizado para cualquier valor de $n$.

Así, si tenemos $n + 1$ puntos del plano $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, …, $(x_n, y_n)$, existe un único polinomio de grado $n$ dado por

$$y = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

que pasa por cada uno de los $n+1$ puntos. Los coeficientes del polinomio corresponden a la única solución del sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales con $n + 1$ incógnitas definido por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n x_0^n + \cdots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 & = & y_0 \\ a_n x_1^n + \cdots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ \vdots & & \\ a_n x_n^n + \cdots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 & = & y_{n+1} \end{array}\right.$$

## EJERCICIO PROPUESTO

**PARTE 1 (8 puntos)**

Dados los 5 puntos del plano $A = (1, -4)$ , $B = (3, 0)$, $C = (-3, 4)$, $D = (2, 6)$, $F = (-2, -4)$. Determine el polinomio de grado cuatro que pasa ellos.

Pasos a seguir:

1. Formule el sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas correspondiente.
2. Aplique Wolfram Alpha para encontrar la forma reducida equivalente del sistema de ecuaciones.
3. A partir de la forma reducida, pruebe que se trata de un sistema compatible determinado y encuentre la solución única.
4. Escriba el polinomio de grado 4 buscado.

**PARTE 2 (2 puntos)**

La siguiente tabla muestra las ventas de Coca-Colas Entertainment (en miles de millones de dólares) entre los años 1999 y 2002.

| Año | Ventas (miles millones) |
|---|---|
| 1 (1999) | 14.406 |
| 2 (2000) | 14.750 |
| 3 (2001) | 15.700 |
| 4 (2002) | 16.800 |

A partir de estos datos desea una estimación de las ventas en los próximos dos años 2003 y 2004. Para realizarlo, procede de la siguiente forma:

- Como tiene cuatro datos que relacionan cada año con las ventas correspondientes, calcula en primer lugar el polinomio de grado 3 que pasa por cada uno de los puntos. Tal y como hemos visto anteriormente, para cada año desde 1 hasta 4, el valor del polinomio en cada punto proporciona exactamente el valor de las ventas en el año correspondiente.
- A partir del polinomio hallado, basta sustituir en la expresión correspondiente los valores 5 y 6 para así obtener la estimación de las ventas en los próximos dos años.

Se pide:

a) Calcular el valor estimado de las ventas para los años 5 y 6.

b) ¿Tiene sentido el resultado obtenido? Justifica tu respuesta.

c) ¿Diría que el método seguido es el apropiado para realizar la estimación?