Universidad Loyola Andalucía
Titulación: Grado en Datos y Analítica de Negocios
Asignatura: Álgebra
Práctica 2. Modelos de Markov

Introducción

Comenzamos con una definición:

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ es una matriz **estocástica** si se cumplen dos condiciones:

i) Todos los elementos se encuentran en el intervalo $[0,1]$, esto es, $0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad \forall\, i,j$.

ii) La suma de los elementos de cada columna es igual a 1. $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{n,j} = 1$, $j = 1, 2, ..., n$.

Los elementos de una matriz estocástica están asociados normalmente con las probabilidades de que suceda un determinado hecho (observe que los valores están entre 0 y 1 y que la suma de cada columna es igual a 1). Por este motivo, a menudo se le llama matriz de **transición de probabilidades**, y su uso es frecuente en Economía y Ciencias Sociales.

Veamos un ejemplo concreto del uso de las matrices de transición en Economía. Supongamos que un determinado producto es comercializado bajo tres marcas distintas A, B y C. Se conoce el porcentaje de consumidores de cada marca que cambia a otra marca finalizado un periodo de tiempo determinado. Estos datos quedan resumidos en la matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Observemos que cada columna expresa el comportamiento de los consumidores en cada marca y sus elementos suman 1. La primera columna por ejemplo representa el comportamiento de los consumidores de la marca A (el 60% siguen consumiendo A, el 20% se pasa a la marca B y el 20% se pasan a la marca C).

Por ejemplo, el elemento $e_{11} = 0.6$ indica que el 60% de los consumidores de la marca A siguen consumiendo la misma marca. El elemento $e_{13} = 0.2$ indica que el 20% de los consumidores de la marca C cambian a la marca A.

Supongamos que conocemos el número de personas que consumen cada marca en estos momentos y lo representamos mediante la matriz

$$X_0 = \begin{pmatrix} n_A \\ n_B \\ n_C \end{pmatrix}.$$

A partir de la matriz de transición E es posible saber cuál será la distribución de personas X_1 que consumirán cada marca después de que realicen la nueva elección. Concretamente, basta calcular el producto de E y X_0:

$$X_1 = EX_0.$$

Así por ejemplo, si

$$X_0 = \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix},$$

la distribución de consumidores para cada marca después de la nueva compra será:

$$X_1 = EX_0 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 620 \\ 520 \\ 360 \end{pmatrix}.$$

Si suponemos que los consumidores se van a comportar de la misma forma, podemos calcular cuál será el valor pasados dos periodos de tiempo (años, meses,...). Así, $X_2 = EX_1$. Pero sabemos que $X_1 = EX_0$, de donde sustituyendo se tiene que

$$X_1 = EX_1 = EEX_0 = E^2X_0.$$

En general, tras m periodos de tiempo (meses, años,..) resulta que:

$$X_m = E^m X_0, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

A este tipo de procesos se les llama **cadenas de Markov** o **modelos de Markov**, en donde la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior.

Se usan en una amplia variedad de situaciones: biología, química, ingeniería, física, etc. El ejemplo anterior es una aplicación en el ámbito de la economía y del marketing. La misma estructura puede usarse en contextos diferentes. Por ejemplo, en política, si cambiamos las marcas por partidos políticos y los consumidores por votantes, o en migraciones si tenemos regiones del planeta y personas que cambian de una región a otra.

EJERCICIO PROPUESTO

Cinco compañías de telefonía móvil A, B, C, D y E compiten en el mismo mercado. Supongamos que todos los usuarios tienen contrato con alguna de las cinco compañías. En este momento, el número de usuarios de cada compañía es el siguiente: la compañía A tiene 20000 usuarios, la compañía B tiene 60000 usuarios, la C tiene 80000 usuarios, a la D le corresponden 40000 usuarios, y la E un total de 100000 usuarios. Se sabe que pasado un año ocurren los siguientes cambios:
A conserva el 80% de sus clientes, cediendo a B el 5%, a C el 5%, a D el 7%, y a E el 3%.
B conserva el 60% de sus clientes, cediendo a A el 15%, a C el 10%, a D el 10%, y a E el 5%.
C conserva el 75% de sus clientes, cediendo a A el 10%, a B el 5%, a D el 5%, y a E el 5%.
D conserva el 50% de sus clientes, cediendo a A el 22%, a B el 15%, a C el 3%, y a E el 10%.
E conserva el 55% de sus clientes, cediendo a A el 14%, a B el 11%, a C el 12%, y a D el 8%.

PARTE 1 (8 PUNTOS)
Se pide:

a) Escribir la matriz estocástica asociada al proceso.

b) Determine el número de usuarios de cada compañía pasado un año.

c) Calcule el número de usuarios de cada compañía pasados 4 años, suponiendo que la matriz estocástica se mantiene constante en todo el periodo.

d) ¿Qué cálculo matricial hay que realizar para saber el número de usuarios pasados n años? Escriba la expresión matricial.

e) ¿Habrá algún momento en el que se estabilice la cuota de mercado de cada compañía? (el número de clientes de cada compañía sea constante y no varíe con el tiempo). En caso afirmativo, determine estos valores para cada compañía.

PARTE 2 (2 PUNTOS)

f) Cambie el valor inicial de reparto de usuarios por la siguiente distribución: la compañía A tiene 25000 usuarios, la compañía B tiene 55000 usuarios, la C tiene 70000 usuarios, a la D le corresponden 55000 usuarios, y la E un total de 95000 usuarios. ¿Qué ocurre con la cuota de mercado a largo plazo? ¿Cambia o sigue siendo la misma que la obtenida en el apartado anterior?