Universidad Loyola – `Segundo Parcial. Temas 3 y 4`

Titulación: ____________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **28/11/2025**

Apellidos:____________________ Nombre:____________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$2 puntos$\rangle$ Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - \alpha z = 2 \end{cases}$$

a) Exprésele en forma vectorial.

b) Halle para qué valores del parámetro α los vectores definidos por las columnas de la matriz de coeficientes del sistema forman una base del espacio $\mathbb{R}^3$. Clasifique el sistema para los diferentes valores de α obtenidos.

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u} = (1, 5, 2)^T$ en la base formada por los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)^T$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 2)^T$, y $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)^T$?

Ejercicio 2. $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Consideremos los siguientes vectores del plano:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con ellos construimos las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2\}$, y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$. Se pide:

a) Calcule la matriz P del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y las ecuaciones del cambio de base correspondientes.

b) Halle la matriz Q del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Ejercicio 3. $\langle$2 puntos$\rangle$

a) Encuentre un vector unitario $\vec{x}$ que sea ortogonal al subespacio S generado por los vectores $(-1, 2, 1)^T$ y $(0, 1, -2)^T$.

b) Dados los vectores $\vec{a} = (1, -2, 0)^T$ y $\vec{b} = (0, 3, -1)$. Calcule el valor de la expresión

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|^2$$

Ejercicio 4. $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores) de A.

b) ¿Qué relación existe entre los autovalores obtenidos y la Traza y el Determinante de la matriz A?

c) ¿Es la matriz diagonalizable? Justifique su respuesta.

d) ¿Existe algún vector no nulo del plano que quede fijo al aplicarle la transformación dada por la matriz A? Justifique su respuesta

Ejercicio 5. $\langle$3 puntos$\rangle$ Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Calcule los valores propios y vectores propios de B.

b) $\langle$0'5 puntos$\rangle$ ¿Es la matriz B diagonalizable? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P y la matriz diagonal D correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices B, P y D.

c) $\langle$1 punto$\rangle$ Utilice la diagonalización de la matriz B para hallar una expresión para B^n (la potencia n-ésima de la matriz B).

Universidad Loyola – `Recuperación Primer Parcial. Temas 1 y 2`

Titulación: ______________________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **28/11/2025**

Apellidos:______________________________ Nombre:____________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. ⟨3 puntos⟩ Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule el valor de la expresión: $A^2 - 2BB^T + \mathbb{I}_3$, donde $\mathbb{I}_3$ es la matriz identidad de orden 3.

b) Encuentre los valores de α para los que $AA^T - \alpha\mathbb{I}_3$ sea singular.

Ejercicio 2. ⟨1 puntos⟩ Resuelva la siguiente ecuación matricial:

$$A^2X + B(X - B) = B^2 - X.$$

Indique la condición que ha de cumplirse para que sea posible resolver la ecuación (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden).

Ejercicio 3. ⟨1 puntos⟩ Dada una matriz cuadrada C, calcule tres matrices que commuten con C.

Ejercicio 4. ⟨3 puntos⟩ Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

a) Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.

b) Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema de ecuaciones.

c) Encuentre (si existen) la solución o soluciones del sistema.

Ejercicio 5. ⟨3 puntos⟩ Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= \alpha \end{aligned}\right\}.$$

a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro α.

b) Encuentre una solución del sistema para $\alpha = 1$.