XVIII COMPUMATG 2021

# Polinomios ortogonales clásicos y su conexión con el Teorema de Favard

Roberto S. Costas Santos

Trabajo parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación de España, PGC-2018-096504-B-C33.

14 de diciembre de 2021. Cuba (Online)

# Outline

# Primer plato: lo básico

# Primeros principios

- Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional lineal y sea $(P_n) = ops(\mathbf{u})$.
  $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$

## Primeros principios

- Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional lineal y sea $(P_n) = ops(\mathbf{u})$. $P_n(z) = a_n z^n + \dots$
- Propiedad de ortogonalidad de $(P_n)$

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = d_n^2 \delta_{n,m}.$$

# Primeros principios

- Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional lineal y sea $(P_n) = ops(\mathbf{u})$.
  $P_n(z) = a_n z^n + \dots$
- Propiedad de ortogonalidad de $(P_n)$

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = d_n^2 \delta_{n,m}.$$

- Ecuación (distribucional) de pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u}, \quad \text{grado } \psi \leq 1, \ \text{grado } \phi \leq 2.$$

# Primeros principios

- Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional lineal y sea $(P_n) = ops(\mathbf{u})$.
  $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$
- Propiedad de ortogonalidad de $(P_n)$

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = d_n^2 \delta_{n,m}.$$

- Ecuación (distribucional) de pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u}, \quad \text{grado } \psi \leq 1, \ \text{grado } \phi \leq 2.$$

- Relación de recurrencia a tres términos:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \quad y \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n P_{n+1}(0) + \gamma_n P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

# Primeros principios

- Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional lineal y sea $(P_n) = ops(\mathbf{u})$.
  $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$
- Propiedad de ortogonalidad de $(P_n)$

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = d_n^2 \delta_{n,m}.$$

- Ecuación (distribucional) de pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u}, \quad \text{grado } \psi \leq 1, \ \text{grado } \phi \leq 2.$$

- Relación de recurrencia a tres términos:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \quad y \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n P_{n+1}(0) + \gamma_n P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

- La función peso $d\mu(z) = \omega(z)\, dz$

$$\langle \mathbf{u}, P \rangle = \int_{\Gamma} P(z)\, d\mu(z) = \int_{\Gamma} P(z)\, \omega(z)\, dz, \qquad \Gamma \subset \mathbb{C}.$$

# Los momentos

- La función peso satiaface la ecuación de Pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)) = \psi(z)\omega(z)$$

# Los momentos

- La función peso satiaface la ecuación de Pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)) = \psi(z)\omega(z)$$

- Los momentos del funcional $\mathbf{u}$ son

$$\mathbf{m}_n = \langle \mathbf{u}, x^n \rangle, \quad n = 0, 1, ....$$

# Los momentos

- La función peso satiaface la ecuación de Pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)) = \psi(z)\omega(z)$$

- Los momentos del funcional **u** son

$$\mathbf{m}_n = \langle \mathbf{u}, x^n \rangle, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

- Dichos momentos satisfacen la relación:

$$\left( n\frac{\phi''}{2} + \psi' \right)\mathbf{m}_{n+1} + \left( n\phi'(0) + \psi(0) \right)\mathbf{m}_n + n\phi(0)\mathbf{m}_{n-1} = 0.$$

# Los momentos

- La función peso satiaface la ecuación de Pearson:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)) = \psi(z)\omega(z)$$

- Los momentos del funcional **u** son

$$\mathbf{m}_n = \langle \mathbf{u}, x^n \rangle, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

- Dichos momentos satisfacen la relación:

$$\left(n\frac{\phi''}{2} + \psi'\right)\mathbf{m}_{n+1} + \left(n\phi'(0) + \psi(0)\right)\mathbf{m}_n + n\phi(0)\mathbf{m}_{n-1} = 0.$$

- Además, se tiene

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)\,\pi_m(z)) = \widetilde{\pi}_{m+1}(z)\omega(z)$$

# Ecuación diferencial

- De hecho, se tiene:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)\,P_n'(x)) = R_n(z)\omega(z) \quad \Rightarrow \quad R_n(z) = \lambda_n P_n(z),$$

# Ecuación diferencial

- De hecho, se tiene:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)\, P_n'(x)) = R_n(z)\omega(z) \quad \Rightarrow \quad R_n(z) = \lambda_n P_n(z),$$

- Dicha *ops* satisface la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{1}{\omega(z)}\left(\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)P_n'(z)\right) = \lambda_n P_n(z),$$

# Ecuación diferencial

- De hecho, se tiene:

$$\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)\, P_n'(x)) = R_n(z)\omega(z) \quad \Rightarrow \quad R_n(z) = \lambda_n P_n(z),$$

- Dicha *ops* satisface la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{1}{\omega(z)} \left(\mathscr{D}(\phi(z)\omega(z)P_n'(z)\right) = \lambda_n P_n(z),$$

- Que puede escribirse como:

$$\left(\phi(z)\mathscr{D}^2 + \psi(z)\mathscr{D}\right)\left[P_n(z)\right] = \lambda_n P_n(z) = n\left((n-1)\frac{\phi''}{2} + \psi'\right)P_n(z).$$

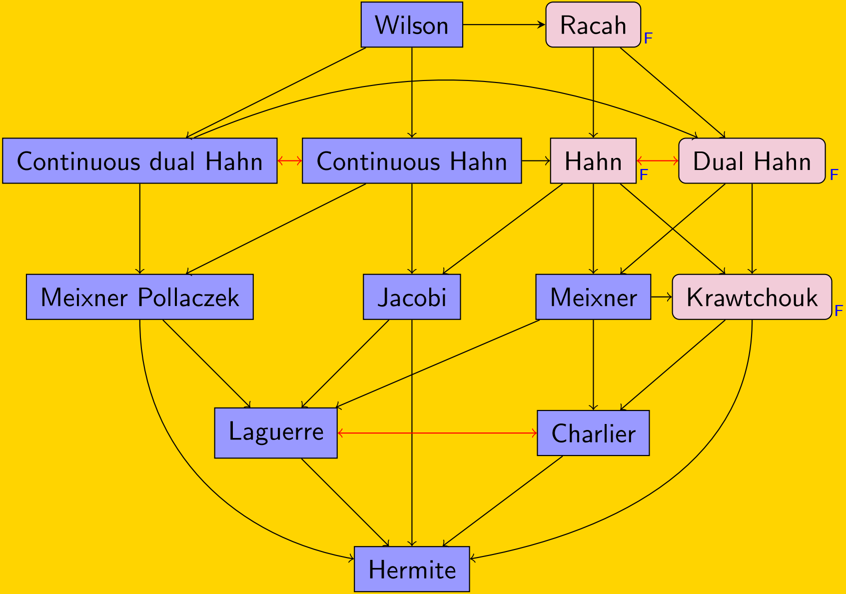
# Representación Hipergeométrica

Dichos polinomios admiten una representación en términos de las series hipergeométricas:

$$ {}_rF_s\left( \begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ \dots, a_r \\ b_1,\ b_2,\ \dots, b_s \end{array} \middle| z \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k(a_2)_k\dots(a_r)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\dots(b_s)_k}\frac{z^k}{k!}. $$

donde $(a)_0 = 1$, y $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

# El esquema hipergeométrico



# El teorema de Favard

- La ops satisface la relación de recurrencia:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

donde $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$, y

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \quad y \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n P_{n+1}(0) + \gamma_n P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

# El teorema de Favard

- La ops satisface la relación de recurrencia:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

donde $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$, y

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \quad y \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n P_{n+1}(0) + \gamma_n P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

- **Teorema de Favard:** Si $\gamma_n \neq 0$ existe un funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que $P_n = ops(\mathcal{L})$, i.e.

$$\mathcal{L}(P_n P_m) = h_n \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

donde $h_n \neq 0$ para todo $n$.

# El teorema de Favard

- La ops satisface la relación de recurrencia:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

donde $P_n(z) = a_n z^n + \dots$, y

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_n - 1}, \quad \gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \quad y \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n P_{n+1}(0) + \gamma_n P_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

- **Teorema de Favard:** Si $\gamma_n \neq 0$ existe un funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que $P_n = ops(\mathcal{L})$, i.e.

$$\mathcal{L}(P_n P_m) = h_n \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

donde $h_n \neq 0$ para todo $n$.

- Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_N^2 = 0$, entonces la secuencia de polinomios es finita.

# El teorema de Favard degenerado

## Teorema de Favard degenerado

Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_N = 0$, i.e. $d_N^2 = 0$, entonces existen dos funcionales de momentos, $\mathcal{L}_d$ y $\mathcal{L}_1$, tales que: si definimos

$$\mathcal{B}(f,g) = \mathcal{L}_d(fg) + \mathcal{L}_1\left(f^{(N)}g^{(N)}\right),$$

sentonces la secuencia de polinomios $(P_n)_{n=0}^{M} = ops(\mathcal{B})$, i.e.

$$\mathcal{B}(P_nP_m) = \begin{cases} d_n^2\delta_{n,m}, & \text{si} \quad n,m = 0,1,\dots,N-1, \\ \mathcal{L}_1\left(P_n^{(N)}P_m^{(N)}\right)\delta_{n,m}, & \text{si} \quad n,m = N,\dots,M-1. \end{cases}$$

- Costas-Santos, R. S. and Sanchez-Lara, J. F. Extensions of discrete classical orthogonal polynomials beyond the orthogonality. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **225**, no. 2 (2009), 440-451

Los polinomios de Jacobi:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix}\,;\frac{1-z}{2}\right),$$

con

$$\gamma_n = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

Los polinomios de Laguerre:

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ \alpha+1 \end{matrix}\,;z\right),$$

con

$$\gamma_n = -\frac{n+\alpha}{n+1}.$$

El segundo plato:

Los polinomios ortogonales clásicos discretos

# Lo básico

- El funcional clásico discreto $\mathbf{u}$ satisface

$$\Delta(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u},$$

donde $\Delta = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_0$ siendo $\mathfrak{s}_a\big[f(n;z)\big] = f(n;z+a)$.

# Lo básico

- El funcional clásico discreto $\mathbf{u}$ satisface
$$\Delta(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u},$$
donde $\Delta = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_0$ siendo $\mathfrak{s}_a\big[f(n;z)\big] = f(n;z+a)$.
- Relación de recurrencia a tres términos:
$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

# Lo básico

- El funcional clásico discreto $\mathbf{u}$ satisface

$$\Delta(\phi(z)\mathbf{u}) = \psi(z)\mathbf{u},$$

donde $\Delta = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_0$ siendo $\mathfrak{s}_a\big[f(n;z)\big] = f(n;z+a)$.

- Relación de recurrencia a tres términos:

$$zP_n(z) = \alpha_n P_{n+1}(z) + \beta_n P_n(z) + \gamma_n P_{n-1}(z).$$

- Además, se tiene

$$\Delta(\phi(z)\pi_m(z)\mathbf{u}) = \widetilde{\pi}_{m+\mathbf{1}}(z)\mathbf{u},$$

# La ecuación en diferencias

- Los polinomios clásicos discretos satisfacen

$$\Delta(\phi(z)\nabla P_n(z)\mathbf{u}) = R_n(z)\mathbf{u}$$

donde $\nabla = \mathfrak{s}_0 - \mathfrak{s}_{-1}$.

# La ecuación en diferencias

- Los polinomios clásicos discretos satisfacen

$$\Delta(\phi(z)\nabla P_n(z)\mathbf{u}) = R_n(z)\mathbf{u}$$

  donde $\nabla = \mathfrak{s}_0 - \mathfrak{s}_{-1}$.
- De hecho, $R_n(z) = \lambda_n P_n(z)$.

# La ecuación en diferencias

- Los polinomios clásicos discretos satisfacen

$$\Delta(\phi(z)\nabla P_n(z)\mathbf{u}) = R_n(z)\mathbf{u}$$

  donde $\nabla = \mathfrak{s}_0 - \mathfrak{s}_{-1}$.
- De hecho, $R_n(z) = \lambda_n P_n(z)$.
- Es decir

$$\Delta(\phi(z)\nabla P_n(z)\mathbf{u}) = \lambda_n P_n(z)\mathbf{u}$$

  cuando tenemos la función peso:

$$\frac{1}{\omega(z)}\Delta(\phi(z)\omega(z)\nabla P_n(z)) = \lambda_n P_n(z)$$

$$(\phi(z)\Delta\nabla + \psi(z)\Delta)\left[P_n(z)\right] = \lambda_n P_n(z) = n\left((n-1)\frac{\phi''}{2} + \psi'\right)P_n(z).$$

# Recurrencias

En resumen, la ecuación en diferencias puede escribirse como:

$$(\phi(z) + \psi(z))\,\mathfrak{s}_1 - (2\phi(z) + \psi(z) + \lambda_n)\mathfrak{s}_0 + \phi(z)\mathfrak{s}_{-1} = 0.$$

La relación de recurrencia a tres términos como:

$$\alpha_n \mathfrak{n}_1 - (z - \beta_n)\mathfrak{n}_0 + \gamma_n \mathfrak{n}_{-1} = 0,$$

donde $\mathfrak{n}_a \left[ f(n;z) \right] = f(n+a;z)$.

Además, la relación de recurrencia de los momentos discretos, $\mathbf{m}_n = \langle \mathbf{u}, (x)_n \rangle$, puede escribirse como:

$$\frac{\lambda_{n+1}}{n+1}\mathfrak{n}_1 - \left( \frac{3\phi''}{2} - \phi'(0) + n\phi'' + \psi'(0) - (n+1)\psi' \right) \mathfrak{n}_0 + n \left( \frac{\phi''}{2} - \phi'(0) + \phi(0) + \phi'' n - \phi'(0) n + \frac{\phi''}{2} n^2 \right) \mathfrak{n}_{-1} = 0.$$

# El último plato: problemas abiertos

## Problemas abiertos

- El problema de momentos

  **Lectura recomendada:**
  Tesis doctoral de Jacob Stordal Christiansen (Lund University)

- Funcionales singulares

  **Lectura recomendada:**
  Medem, Juan Carlos. A family of singular semi-classical functionals. *Indag. Math. (N.S.)* **13** (2002), no. 3, 351–362.

- Ortogonalidad no estandar

  **Lectura recomendada:**
  Pérez, Teresa E.; Piñar, Miguel A.; Piñar, Miguel A. On Sobolev orthogonality for the generalized Laguerre polynomials. *J. Approx. Theory* **86** (1996), no. 3, 278–285.

- El problema de la dualidad: Dado $P(n; z)$ que satisface ... enontrar $Q(n; z)$ tal que

$$P(f(n); g(z)) = Q(g(n); f(z)).$$

## Referencias interesantes adicionales:


- Kwon, K. H.; Littlejohn, L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{-k}(x)\}$ for positive integers $k$. Special functions (Torino, 1993). *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), no. 1-4, 289–303.

- Grünbaum, F. Alberto. The Darboux process and a noncommutative bispectral problem: some explorations and challenges. *Geometric aspects of analysis and mechanics*, 161–177, Progr. Math., 292, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

- Cohl, H. S., Costas-Santos, R. S. and Xu, W. The orthogonality of Al-Salam-Carlitz polynomials for complex parameters *Frontiers in Orthogonal Polynomials and q-Series*. Contemporary Mathematics and its Applications: Monographs, Expositions and Lecture Notes, Eds. Zuhair Nashed and Xin Li, Vol. 1, Chapter 8, 155–167, World Scientific Publishing Company, Cambridge, MA, 2018.

## Esto es todo, amigos! ;)

Gracias por vuestra atención