COMPUMATG 2022

Aproximaciones racionales, funciones hipergeométricas y ecuaciones en diferencias

Roberto S. Costas Santos

Trabajo parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación de España, PGC-2018-096504-B-C33.

27 de enero de 2022. Cuba (Online)

Contenido

Números irracionales
Medida de Irracionalidad

Primeros principios

- Sea α un número real.

Primeros principios

- Sea α un número real.
- Dicho número es racional si existen números enteros m y n, con $n \neq 0$, tales que
$$\alpha = \frac{m}{n}.$$

Primeros principios

- Sea α un número real.
- Dicho número es racional si existen números enteros m y n, con $n \neq 0$, tales que
$$\alpha = \frac{m}{n}.$$
- El número se dice irracional si no es racional.
$$\sqrt{2} \in \mathbb{I}.$$

Primeros principios

- Sea α un número real.
- Dicho número es racional si existen números enteros m y n, con $n \neq 0$, tales que
$$\alpha = \frac{m}{n}.$$
- El número se dice irracional si no es racional.
$$\sqrt{2} \in \mathbb{I}.$$
- Hay diferentes tipos de números irracionales: algebraicos, trascendentes, ...
$$\pi, \quad \sqrt[3]{7}, \quad e, \quad \gamma, \quad \ldots$$

Primeros principios

- Sea α un número real.
- Dicho número es racional si existen números enteros m y n, con $n \neq 0$, tales que
$$\alpha = \frac{m}{n}.$$
- El número se dice irracional si no es racional.
$$\sqrt{2} \in \mathbb{I}.$$
- Hay diferentes tipos de números irracionales: algebraicos, trascendentes, ...
$$\pi, \quad \sqrt[3]{7}, \quad e, \quad \gamma, \quad \ldots$$
- El número α es algebraico si la raíz de determinado polinomio $p(x)$, i.e. $p(\alpha) = 0$.
$$\alpha = \sqrt[3]{7} \quad \Rightarrow \quad p(x) = x^3 - 7.$$

Primeros resultados

Lemma (Lemma de irracionalidad)

Sea x un número real. Si existen enteros p_n y q_n tales que:

- $q_n x - p_n \neq 0$ *para cada* $n = 0, 1, \ldots,$
- $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0,$

entonces x es irracional.

Proof.

Si x es racional, entonces $x = p/q$, por tanto

$$p\, q_n - q\, p_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |p\, q_n - q\, p_n| \geq 1, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

por tanto

$$|q_n x - p_n| \geq 1/|q|,$$

luego la segunda parte no puede darse. $\square$

Medida de irracionalidad

- Observe que el lema implica que dichos números irracionales x pueden aproximarse a través de números racionales p_n/q_n tanto como queramos.

Medida de irracionalidad

- Observe que el lema implica que dichos números irracionales x pueden aproximarse a través de números racionales p_n/q_n tanto como queramos.
- Sea x un número real y sea $\mathfrak{R}$ el conjunto de números reales positivos μ para los que

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\mu}}$$

tiene (a lo más) un número finito de soluciones p/q con p y q enteros. La medida de irracionalidad se define como el umbral en el que x ya no es aproximable mediante números racionales, i.e.

$$\mu(x) := \inf_{\mu \in \mathfrak{R}} \mu.$$

Medida de irracionalidad

- Observe que

$$\mu(x) = \sup \left\{ \mu \geq 0 : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{\mu}} \right\}.$$

Medida de irracionalidad

- Observe que

$$\mu(x) = \sup\left\{\mu \geq 0 : 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\mu}}\right\}.$$

- Si x es racional, entonces $\mu(x) = 1$.

Medida de irracionalidad

- Observe que

$$\mu(x) = \sup\left\{\mu \geq 0 : 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{\mu}}\right\}.$$

- Si x es racional, entonces $\mu(x) = 1$.
- Dirichlet (c. 1849) Si x es irracional, entonces $\mu(x) \geq 2$.

Medida de irracionalidad

- Observe que

$$\mu(x) = \sup \left\{ \mu \geq 0 : 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{\mu}} \right\}.$$

- Si x es racional, entonces $\mu(x) = 1$.
- Dirichlet (c. 1849) Si x es irracional, entonces $\mu(x) \geq 2$.
- Roth (1955) Si x es irracional algebraico, entonces $\mu(x) = 2$.

Funciones Hipergeométricas

Son de la forma

$$ {}_rF_s\left(\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ \ldots, a_r \\ b_1,\ b_2,\ \ldots, b_s \end{array} \middle| z \right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \ldots (a_r)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \ldots (b_s)_k} \frac{z^k}{k!}. $$

donde $(a)_0 = 1$, y $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Recurrencia de la función de Gauss

La función $f_n = {}_2F_1(-n, b; c; z)$ satisface la ecuación en diferencias

$$ (c+n)f_{1+n} = (c+2n-bz-nz)f_n + n(z-1)f_{n-1}, $$

con condiciones iniciales $f_0 = 1$ y $f_1 = 1 - \frac{b}{c}z$.

Primer resultado clave

El algoritmo de Zeilberger [3]

Es un algoritmo que encuentra una recurrencia polinomial para determinadas series hipergeométricas de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=1}^{A}(a_i n + a'_i k + a''_i)!}{\prod_{i=1}^{B}(b_i n + b'_i k + b''_i)!} z^k = C \frac{\prod_{i=1}^{A}(\overline{a_i} n + \overline{a'_i})!}{\prod_{i=1}^{B}(\overline{b_i} n + \overline{b'_i})!} x^n,$$

donde $a_i, a'_i, \overline{a_i}, b_i, b'_i, \overline{b_i}$ son enteros y $a''_i, \overline{a'_i}, b''_i, \overline{b'_i}$, C, x y z son números complejos.

Ejemplo

- Consideremos la sucesión

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (2k+n+2) \frac{(-k)_n (k+n+2)_n}{(k+1)_{n+1}^4}$$

Ejemplo

- Consideremos la sucesión

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (2k+n+2) \frac{(-k)_n (k+n+2)_n}{(k+1)_{n+1}^4}$$

- Desarrollando dicha serie se tiene

$$R_n = a_n - b_n \zeta(3)$$

Ejemplo

- Consideremos la sucesión

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (2k+n+2) \frac{(-k)_n (k+n+2)_n}{(k+1)_{n+1}^4}$$

- Desarrollando dicha serie se tiene

$$R_n = a_n - b_n \zeta(3)$$

- Usando el algoritmo de Zeilberger obtenemos que R_n satisface

$$n\, u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right) u_n + (n+1)^5 u_{n+1} = 0,$$

con ciertas condiciones iniciales.

Ejemplo

- Consideremos la sucesión

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} (2k+n+2) \frac{(-k)_n (k+n+2)_n}{(k+1)_{n+1}^4}$$

- Desarrollando dicha serie se tiene

$$R_n = a_n - b_n \zeta(3)$$

- Usando el algoritmo de Zeilberger obtenemos que R_n satisface

$$n\, u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2+17n+5\right) u_n + (n+1)^5 u_{n+1} = 0,$$

con ciertas condiciones iniciales.

- De hecho a_n y b_n satisfacen la misma ecuación en diferencias.

Ejemplo

- Si lo redefinimos como $S_n = (-1)^n \left(n!\right)^2 R_n$, entonces S_n satisface

$$n^3\, u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right) u_n + (n+1)^3 u_{n+1} = 0$$

Ejemplo

- Si lo redefinimos como $S_n = (-1)^n (n!)^2 R_n$, entonces S_n satisface

$$n^3 u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right) u_n + (n+1)^3 u_{n+1} = 0$$

- Esto es una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$p_0(n-1)\, u_{n-1} + p_1(n) u_n + p_0(n) u_{n+1} = 0$$

$$p_0(n) \Delta \nabla u_n - \nabla p_0(n) \nabla u_n + \left(p_0(n-1) + p_1(n) + p_0(n)\right) u_n = 0$$

Ejemplo

- Si lo redefinimos como $S_n = (-1)^n (n!)^2 R_n$, entonces S_n satisface

$$n^3\, u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right) u_n + (n+1)^3 u_{n+1} = 0$$

- Esto es una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$p_0(n-1)\, u_{n-1} + p_1(n) u_n + p_0(n) u_{n+1} = 0$$

$$p_0(n) \Delta\nabla u_n - \nabla p_0(n) \nabla u_n + \left(p_0(n-1) + p_1(n) + p_0(n)\right) u_n = 0$$

- Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 + 34\lambda + 1 = 0$ son

$$\lambda_1 \approx -0.03 \qquad \lambda_2 \approx -33.97$$

Ejemplo

- Si lo redefinimos como $S_n = (-1)^n (n!)^2 R_n$, entonces S_n satisface

$$n^3 u_{n-1} + (2n+1)\left(17n^2 + 17n + 5\right) u_n + (n+1)^3 u_{n+1} = 0$$

- Esto es una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$p_0(n-1)\, u_{n-1} + p_1(n) u_n + p_0(n) u_{n+1} = 0$$

$$p_0(n) \Delta\nabla u_n - \nabla p_0(n) \nabla u_n + \left(p_0(n-1) + p_1(n) + p_0(n)\right) u_n = 0$$

- Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 + 34\lambda + 1 = 0$ son

$$\lambda_1 \approx -0.03 \qquad \lambda_2 \approx -33.97$$

- Además

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad a_n = ??$$

Teorema de Poincaré [2]

Supongamos que las raíces características de

$$u_{n+d} + p_{d-1}(n)u_{n+d-1} + \cdots + p_1(n)u_{n+1} + p_0(n)u_n = 0$$

tienen distintos módulos. Si u_n resuelve la recurrencia anterior, entonces $u_n = 0$ para todo n suficientemente grande, o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda_k,$$

para cierto $k \in \{1, ..., d\}$.

Ejemplo

En este ejemplo se tiene que

$$R_n = a_n - b_n\zeta(3)$$

y además aplicando el Teorema de Poincaré

$$R_n = (-1)^n \frac{S_n}{(n!)^2} \approx \frac{(-\lambda_1)^n}{(n!)^2} \to 0,$$

$$a_n, b_n \approx \frac{(-\lambda_2)^n}{(n!)^2}$$

pero ojo, que dichos números a_n y b_n no son enteros, si no números racionales.

$$\left|\frac{R_n}{b_n}\right| = \left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right|$$

Wronskianos y ecuaciones en diferencias

La ecuación en diferencias [1]

- Son de la forma

$$p_0(n)u_n + p_1(n)u_{n+1}(n) + \cdots + p_d(n)u_{n+d} = 0$$

donde $\deg p_k$ es un polinomio $k = 0, 1, ..., d$

La ecuación en diferencias [1]

- Son de la forma

$$p_0(n)u_n + p_1(n)u_{n+1}(n) + \cdots + p_d(n)u_{n+d} = 0$$

donde $\deg p_k$ es un polinomio $k = 0, 1, ..., d$

- En los casos que encontramos en la literatura se tiene

$$p_d(n) = P(n+1)D_n, \qquad p_0(n) = P(n)N_n$$

y $\deg p_k(n)$ es constante, i.e. $\deg p_k(n) = T,\ k = 0, 1, ..., d$

Primeras relaciones con Wronskianos

- Si se tiene una expresión de la forma

$$R_n = a_0(n) + a_1(n)\eta_1 + a_2(n)\eta_2 + a_3(n)\eta_3$$

Primeras relaciones con Wronskianos

- Si se tiene una expresión de la forma

$$R_n = a_0(n) + a_1(n)\eta_1 + a_2(n)\eta_2 + a_3(n)\eta_3$$

- Entonces

$$W_n(R,1,2) = W_n(0,1,2)+W_n(3,1,2)\eta_3 = W_n(0,1,2)+W_n(1,2,3)\eta_3,$$

donde

$$W_n(R,1,2) = \begin{vmatrix} R_n & a_1(n) & a_2(n) \\ R_{n+1} & a_1(n+1) & a_2(n+1) \\ R_{n+2} & a_1(n+2) & a_2(n+2) \end{vmatrix}$$

y si $i \neq j \neq k$

$$W_n(i,j,k) = \begin{vmatrix} a_i(n) & a_j(n) & a_k(n) \\ a_i(n+1) & a_j(n+1) & a_k(n+1) \\ a_i(n+2) & a_j(n+2) & a_k(n+2) \end{vmatrix}$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$
\begin{aligned}
p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\
p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0, \\
p_0(n)a_3(n) + p_1(n)a_3(n+1) + p_2(n)a_3(n+2) + p_3(n)a_3(n+3) &= 0.
\end{aligned}
$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$\begin{aligned} p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\ p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0, \\ p_0(n)a_3(n) + p_1(n)a_3(n+1) + p_2(n)a_3(n+2) + p_3(n)a_3(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

- Manipulamos las expresiones para eliminar $p_1(n)$ quedando

$$\begin{aligned} p_0(n)W_n(1,2) - p_2(n)W_{n+1}(1,2) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_1(n+3) & a_2(n+3) \\ a_1(n+1) & a_2(n+1) \end{vmatrix} &= 0 \\ p_0(n)W_n(2,3) - p_2(n)W_{n+1}(2,3) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_2(n+3) & a_3(n+3) \\ a_2(n+1) & a_3(n+1) \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$
\begin{aligned}
p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\
p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0, \\
p_0(n)a_3(n) + p_1(n)a_3(n+1) + p_2(n)a_3(n+2) + p_3(n)a_3(n+3) &= 0.
\end{aligned}
$$

- Manipulamos las expresiones para eliminar $p_1(n)$ quedando

$$
\begin{aligned}
p_0(n)W_n(1,2) - p_2(n)W_{n+1}(1,2) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_1(n+3) & a_2(n+3) \\ a_1(n+1) & a_2(n+1) \end{vmatrix} &= 0 \\
p_0(n)W_n(2,3) - p_2(n)W_{n+1}(2,3) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_2(n+3) & a_3(n+3) \\ a_2(n+1) & a_3(n+1) \end{vmatrix} &= 0.
\end{aligned}
$$

- Si ahora eliminamos $p_2(n)$ se obtiene trás algunas manipulaciones

$$p_1(n)W_n(1,2,3) + p_3(n)W_{n+1}(1,2,3) = 0.$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$\begin{aligned} p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\ p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$\begin{aligned} p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\ p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

- Manipulamos las expresiones para eliminar $p_1(n)$ quedando

$$p_0(n)W_n(1,2) - p_2(n)W_{n+1}(1,2) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_1(n+3) & a_2(n+3) \\ a_1(n+1) & a_2(n+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Más relaciones con Wronskianos

- Supongamos que

$$\begin{aligned} p_0(n)a_1(n) + p_1(n)a_1(n+1) + p_2(n)a_1(n+2) + p_3(n)a_1(n+3) &= 0, \\ p_0(n)a_2(n) + p_1(n)a_2(n+1) + p_2(n)a_2(n+2) + p_3(n)a_2(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

- Manipulamos las expresiones para eliminar $p_1(n)$ quedando

$$p_0(n)W_n(1,2) - p_2(n)W_{n+1}(1,2) + p_3(n)\begin{vmatrix} a_1(n+3) & a_2(n+3) \\ a_1(n+1) & a_2(n+1) \end{vmatrix} = 0.$$

- Teniendo en cuenta las recurrencias originales tomando $n \mapsto n+1$, multiplicamos la expresión anterior por $p_0(n+1)$ y simplificamos

$$\begin{aligned} &p_0(n)p_0(n+1)W_n(1,2) - p_2(n)p_0(n+1)W_{n+1}(1,2) \\ &\quad + p_3(n)p_1(n+1)W_{n+2}(1,2) - p_3(n)p_3(n+1)W_{n+3}(1,2) = 0. \end{aligned}$$

Últimas observaciones

- Supongamos que $p_i(n) = \lambda_i n^T + \mathcal{O}(n^{T-1})$ $i = 0, 1, ..., 3$ y que

$$\begin{aligned}
p_0(n)u_1(n) + p_1(n)u_1(n+1) + p_2(n)u_1(n+2) + p_3(n)u_1(n+3) &= 0 \\
p_0(n)p_0(n+1)W_n(1,2) - p_2(n)p_0(n+1)W_{n+1}(1,2) & \\
+p_3(n)p_1(n+1)W_{n+2}(1,2) - p_3(n)p_3(n+1)W_{n+3}(1,2) &= 0
\end{aligned}$$

Últimas observaciones

- Supongamos que $p_i(n) = \lambda_i n^T + \mathcal{O}(n^{T-1})$ $i = 0, 1, ..., 3$ y que

$$\begin{aligned} p_0(n)u_1(n) + p_1(n)u_1(n+1) + p_2(n)u_1(n+2) + p_3(n)u_1(n+3) &= 0 \\ p_0(n)p_0(n+1)W_n(1,2) - p_2(n)p_0(n+1)W_{n+1}(1,2) & \\ +p_3(n)p_1(n+1)W_{n+2}(1,2) - p_3(n)p_3(n+1)W_{n+3}(1,2) &= 0 \end{aligned}$$

- De la primera ecuación se decude que la ecuación característica es

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$$

con raíces r_1, r_2, r_3.

Últimas observaciones

- Supongamos que $p_i(n) = \lambda_i n^T + \mathcal{O}(n^{T-1})$ $i = 0, 1, ..., 3$ y que

$$\begin{aligned} p_0(n)u_1(n) + p_1(n)u_1(n+1) + p_2(n)u_1(n+2) + p_3(n)u_1(n+3) &= 0 \\ p_0(n)p_0(n+1)W_n(1,2) - p_2(n)p_0(n+1)W_{n+1}(1,2) & \\ +p_3(n)p_1(n+1)W_{n+2}(1,2) - p_3(n)p_3(n+1)W_{n+3}(1,2) &= 0 \end{aligned}$$

- De la primera ecuación se decude que la ecuación característica es

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$$

  con raíces r_1, r_2, r_3.
- De la segunda ecuación se decude que la ecuación característica es

$$\lambda_3 + \lambda_2 \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_0} x\right) + \lambda_1 \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_0} x\right)^2 + \lambda_0 \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_0} x\right)^3 = 0$$

  con raíces $r_1 r_2$, $r_1 r_3$, $r_2 r_3$.

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{R_n}{b_n}\right| \approx \left|\frac{\lambda}{\mu}\right|^n \to 0?$$

Solo si $|\lambda| < |\mu|$.

problemas abiertos

Problemas abiertos

- Obtener la mejor medida de Irracionalidad de π, $\zeta(2)$, y otros.

  Lectura recomendada: https://wain.mi-ras.ru

- Irracionalidad de ciertos números:

  $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, γ (Euler-Mascheroni), otros

- Dada una ecuación en diferencias con coeficientes polinomicos ¿qué números irracionales pueden aproximarse con esta?

Esto es todo, amigos! ;)

Gracias por vuestra atención

Walter G. Kelley and Allan C. Peterson.
Difference equations.
Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, second edition, 2001.
An introduction with applications.

H. Poincaré.
Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.
Acta Math., 13:1–270, 1890.

D. Zeilberger.
A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities.
Discrete Mathematics, 80(2):207–211, 1990.