COMPUMATG 2022

Matrices Totalmente Positivas Relativas a un árbol

Roberto S. Costas Santos

24 de febrero de 2022. Cuba (Online)

Contenido

Matrices y grafos

Primeros principios

- Una matriz es **totalmente positiva (TP)** si todos sus menores son positivos. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Primeros principios

- Una matriz es **totalmente positiva (TP)** si todos sus menores son positivos. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Una **P-matriz** tiene sus menores principales son positivos.

Primeros principios

- Una matriz es **totalmente positiva (TP)** si todos sus menores son positivos. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Una **P-matriz** tiene sus menores principales son positivos.
- Nos interesa en particular ciertas submatrices de dichas matrices TP, e identificarlas como listas ordenadas.

Primeros principios

- Una matriz es **totalmente positiva (TP)** si todos sus menores son positivos. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Una **P-matriz** tiene sus menores principales son positivos.
- Nos interesa en particular ciertas submatrices de dichas matrices TP, e identificarlas como listas ordenadas.
- Si consieramos $\alpha, \beta \subseteq \{1, ..., n\}$ con $|\alpha| = |\beta| = k$ denotaremos por $A[\alpha; \beta]$ a la submatriz de tamaño $k \times k$ de A cuyas filas y columnas vienen dadas por α y β respectivamente.

$$A[2, 3; 1, 2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Denotaremos por $A(\alpha;\beta)$ a la submatriz de tamaño $(n-k)\times(n-k)$ de A donde eliminamos las filas y columnas de A que vienen dadas por α y β respectivamente.

$$A(2,3;1,2) = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Denotaremos por $A(\alpha;\beta)$ a la submatriz de tamaño $(n-k)\times(n-k)$ de A donde eliminamos las filas y columnas de A que vienen dadas por α y β respectivamente.

$$A(2,3;1,2) = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

- Además, denotaremos por

$$A[\alpha;\alpha] = A[\alpha], \qquad A(\alpha;\alpha) = A(\alpha).$$

La identidad de Sylvester

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Identidad de Sylvester

$$\det A[\alpha;\beta] = \frac{\det A[\alpha';\beta'] \det A['\alpha;'\beta] - \det A[\alpha';'\beta] \det A['\alpha;\beta']}{\det A['\alpha';'\beta']}.$$

`Ejemplo:` Si $\alpha = \beta = \{1,2,3\}$, entonces

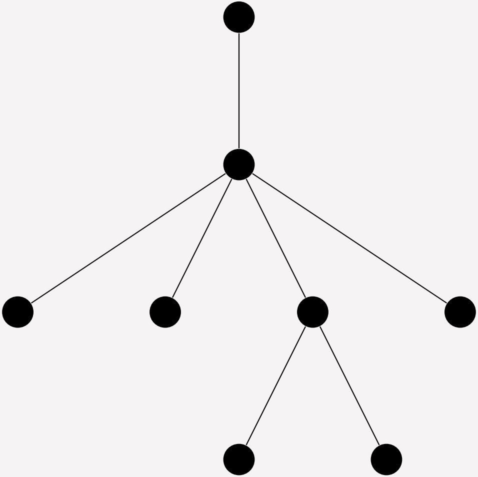
$$\alpha' = \{1,2\}, \quad '\alpha = \{2,3\}, \quad y \quad '\alpha' = \{2\}.$$

Una identidad más

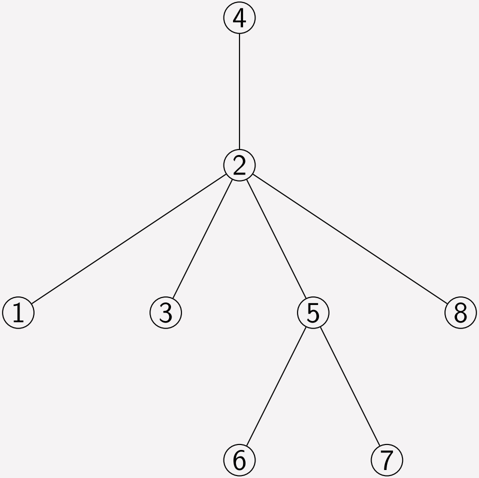
Sea $\tilde{A} = Adj(A)$ para tal que

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I.$$

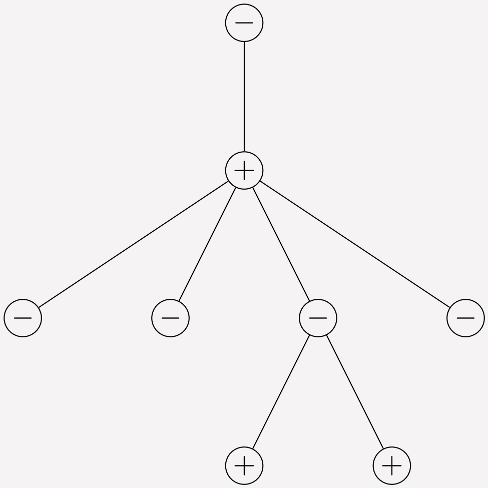
Árboles



Árboles



Árboles



Introducimos el problema que relaciona las matrices y los árboles

Problema: Dado un árbol T y una matriz A que es T-TP con respecto a dicho árbol. Esto es, por cada ruta que tengamos en el arbol α, $A[\alpha]$ es TP.

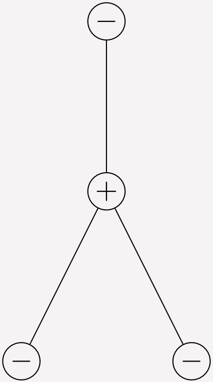
Para cualquier árbol T, el vector propio asociado con el valor propio más pequeño de una matriz T-TP debe formarse de acuerdo con el árbol etiquetado T. (la conjetura T-TP).

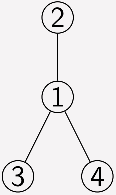
Observaciones:

1) Cada entrada $a_{i,j}$ en la matriz T-TP correspondiente está en una submatriz que es, por definición, TP. Dado que todas las entradas en una matriz TP son positivas, $a_{i,j}$ es positivo para todo i y j.
2) Los valores propios de A son reales, positivos y distintos.
3) El más grande es la raíz de Perron y su vector propio puede tomarse como positivo.

Casos resueltos

Caso primero: La estrella de 5 puntas [2]





Queremos probar que:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \end{pmatrix}$$

Dado que

$$\widetilde{A}A = (\det A)I,$$

siendo

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \end{pmatrix}$$

- Entonces $a_{1,2} < 0$, $a_{1,3} < 0$ y $a_{1,4} < 0$.

Dado que

$$\widetilde{A}A = (\det A)I,$$

siendo

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \end{pmatrix}$$

- Entonces $a_{1,2} < 0$, $a_{1,3} < 0$ y $a_{1,4} < 0$.
- Por simetria: $a_{2,1} < 0$, $a_{3,1} < 0$ y $a_{4,1} < 0$

Dado que

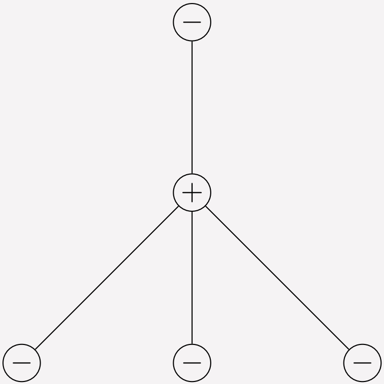
$$\widetilde{A}A = (\det A)I,$$

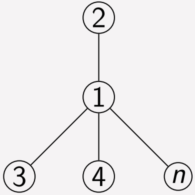
siendo

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \\ ? & + & + & + \end{pmatrix}$$

- Entonces $a_{1,2} < 0$, $a_{1,3} < 0$ y $a_{1,4} < 0$.
- Por simetria: $a_{2,1} < 0$, $a_{3,1} < 0$ y $a_{4,1} < 0$
- Finalmente $a_{1,1} > 0$.

Caso segundo: La estrella de n puntas [2]





Queremos probar que:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

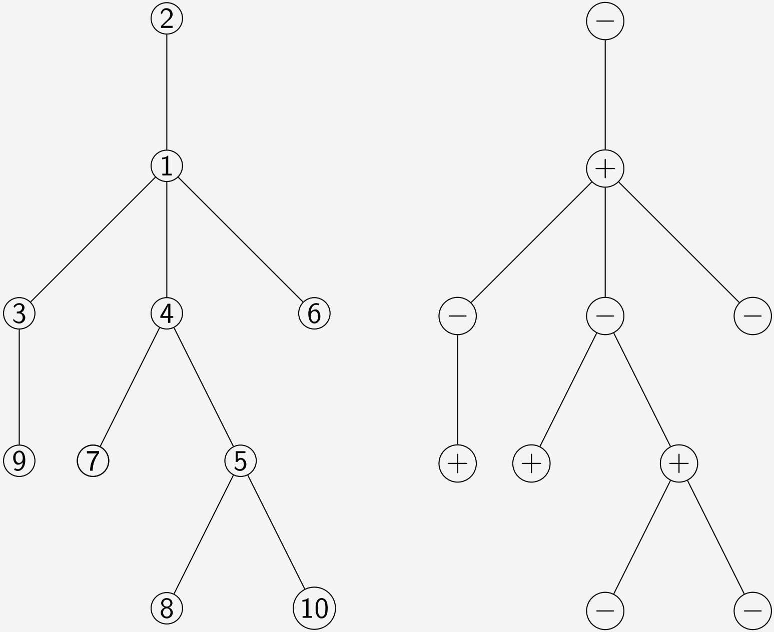
Último caso [1]

Partimos de un árbol T, y su matriz asociada A que es T-TP.

Supongamos que para cada hoja $\{p\}$ del arbol se tiene que $A(p)$ es una P-matriz.

Y supongamos que $\det(A) > 0$.

Entonces el vector propio asociado con el valor propio más pequeño de A se formar de acuerdo con el árbol etiquetado T.


2
1
3
4
6
9
7
5
8
10
−
+
−
−
−
+
+
+
−
−

Estrategia

- Queremos demostrar que

$$\operatorname{signo}\left(\det(A(i;j))\right) = (-1)^{i+j}\sigma_i\sigma_j = (-1)^{i+j}\operatorname{signo}\left(\widetilde{a}_{i,j}\right).$$

Estrategia

- Queremos demostrar que

$$\operatorname{signo}(\det(A(i;j))) = (-1)^{i+j}\sigma_i\sigma_j = (-1)^{i+j}\operatorname{signo}\left(\widetilde{a}_{i,j}\right).$$

- Un resultado **vital** es el siguiente: Dada una matriz A, entonces para cualesquiera i, j, k tales que $1 \leq i, j, k \leq n$, se tiene

$$\widetilde{a}_{ki} \det A[i, \mathcal{N}; i, \mathcal{N}] + \widetilde{a}_{kj} \det A[j, \mathcal{N}; i, \mathcal{N}] + \widetilde{a}_{kk} \det A[k, \mathcal{N}; i, \mathcal{N}] = 0,$$

  donde $\mathcal{N} = \{1, ..., n\} \setminus \{i, j, k\}$.
- Para cualesquiera dos hojas p_1 y p_2

$$\operatorname{signo}\left(\widetilde{a}_{p_1,p_2}\right) = \sigma_{p_1}\sigma_{p_2},$$

  donde se usa que siempre disponemos de, al menos tres hojas en un árbol.

Estrategia

- Sea p una hoja. Para cualquier i se tiene $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,p}\right) = \sigma_p \sigma_i$

Estrategia

- Sea p una hoja. Para cualquier i se tiene $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,p}\right) = \sigma_p \sigma_i$
- Para cualesquiera i, j se tiene que $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,j}\right) = \sigma_i \sigma_j$.

Estrategia

- Sea p una hoja. Para cualquier i se tiene $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,p}\right) = \sigma_p \sigma_i$
- Para cualesquiera i, j se tiene que $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,j}\right) = \sigma_i \sigma_j$.
- Supongamos que $\mathrm{signo}\left(\widetilde{a}_{i,j}\right) \neq \sigma_i \sigma_j$.

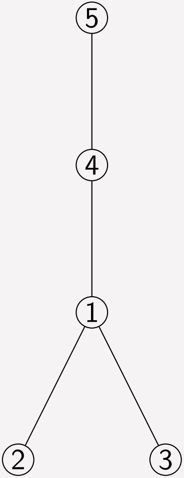
$$\det \widetilde{A}[j,p;i,p] = \begin{vmatrix} \widetilde{a}_{j,i} & \widetilde{a}_{j,p} \\ \widetilde{a}_{p,i} & \widetilde{a}_{p,p} \end{vmatrix} \Rightarrow \mathrm{signo}(\det \widetilde{A}[j,p;i,p]) = -\sigma_i \sigma_j.$$

Como $\det A > 0$ entonces

$$\mathrm{signo}\left(\det \widetilde{A}[j,p;i,p]\right) = \mathrm{signo}\big((-1)^{i+j} \det A[N_{i,p}; N_{j,p}]\big)$$

que es igual a $\mathrm{signo}\big((-1)^{i+j} \det A(p)(i;j)\big) = \sigma_i \sigma_j$.
Que es una **Contradicción!**.

Algunos ejemplos numéricos



$$A = \begin{pmatrix} 55 & 77 & 10 & 17 & 49 \\ 40 & 137 & 3 & 1 & 8 \\ 57 & 74 & 86 & 15 & 47 \\ 94 & 2 & 8 & 86 & 58 \\ 48 & 41 & 4 & 4 & 78 \end{pmatrix}$$

$$\det A < 0 \text{ y } \det A(5) < 0$$

En este caso $\lambda_5 \approx -2.54$ y su autovector es

$$x^T \approx [-68.08, 32.75, 26.69, 45.57, \mathbf{1}].$$

debería tener patrón de signo:

$$x^T = [-, +, +, +, -].$$

Esto es todo, amigos! ;)

Gracias por vuestra atención

R. S. Costas-Santos and C. R. Johnson.
Matrices totally positive relative to a tree, II.
Linear Algebra Appl., 505:1–10, 2016.

C. R. Johnson, R. S. Costas-Santos, and B. Tadchiev.
Matrices totally positive relative to a tree.
Electron. J. Linear Algebra, 18:211–221, 2009.