FM de ecuaciones en diferencias de tipo hipergeométrico en redes no uniformes

R. Álvarez-Nodarse y R. S. Costas-Santos

24 de Mayo 2001

Introducción

$>$ El FM fue utilizado por Darboux y Schrödinger para resolver ED's.

$>$ Infeld and Hull para obtener soluciones analíticas de ED.

$>$ FM está basado en la existencia de los denominados operadores creación y aniquilación asociados a la ED que nos permite escribir explícitamente las soluciones de la ED de una forma sencilla.

$>$ Este trabajo está basado en una idea de Bangerezako y de Lorente que realizaron sendos trabajos asociados al caso discreto y continuo.

$>$ Este trabajo generaliza la idea de los anteriores al caso q en la red más general $x(s) = C_1 q^s + C_2 q^{-s} + C_3$.

Algunas Propiedades básicas de los q-polinomios

En primer lugar discretizamos la ecuación clásica

$$\widetilde{\sigma}(s)y'' + \widetilde{\tau}(s)y' + \lambda y = 0,$$

aproximando las derivadas primera y segunda adecuadamente, y obtenemos la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \tag{1}$$

$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x(s))\Delta x(s-\frac{1}{2}), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),$

donde

$$\nabla f(s) = f(s) - f(s-1) \quad \text{y} \quad \Delta f(s) = f(s+1) - f(s)$$

denotan las diferencias finitas ascendentes y descendentes,

$$\deg(\tilde{\sigma}) \leq 2, \quad \deg(\tilde{\tau}) = 1 \quad \text{y} \quad \lambda \text{ es constante.}$$

¿Porqué se denomina de tipo hipergeométrico?
Si $y(s)$ es solución de (1), entonces la función

$$y_k(s)_q = \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)}\frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)}\cdots\frac{\Delta}{\Delta x(s)}y(s) \equiv \Delta^{(k)}y(s),$$

tambien satisface una ecuación del mismo tipo.

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-\frac{1}{2})}\left[\frac{\nabla y_k(s)_q}{\nabla x_k(s)}\right]+\tau_k(s)\frac{\Delta y_k(s)_q}{\Delta x_k(s)}+\mu_k y_k(s)_q=0, \tag{2}$$

donde $x_k(s)=x(s+\frac{k}{2})$ y

$$\tau_k(s)=\frac{\sigma(s+k)-\sigma(s)+\tau(s+k)\Delta x(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)},$$

$$\mu_k=\lambda+\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\Delta\tau_m(s)}{\Delta x_m(s)}.$$

Las ecuaciones en diferencias anteriores tienen soluciones polinómicas si y sólo si

$$x(s)=c_1(q)q^s+c_2(q)q^{-s}+c_3(q),$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes que pueden depender del parámetro q.

Ecuación en diferencias simetrizada

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-\frac{1}{2})}\left[\sigma(s)\rho_k(s)\frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right]+\mu_k\rho_k(s)y_k(s)=0,$$

Fórmula de Rodrigues

$$\frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)}\cdots\frac{\Delta}{\Delta x(s)}P_n(x(s))_q\equiv\Delta^{(k)}P_n(x(s))_q=\frac{A_{n,k}B_n}{\rho_k(s)}\nabla_k^{(n)}\rho_n(s),$$

donde

$$\nabla_k^{(n)}f(s)=\frac{\nabla}{\nabla x_{k+1}(s)}\frac{\nabla}{\nabla x_{k+2}(s)}\cdots\frac{\nabla}{\nabla x_n(s)}f(s).$$

Condiciones de ortogonalidad

Si se verifica la siguiente condición de contorno

$$\sigma(s)\rho(s)x^k(s-\frac{1}{2})\Big|_{s=a,b}=0, \quad \forall k\geq 0,$$

entonces los polinomios $P_n(s)_q$ son ortogonales, i.e.,

$$\sum_{s_i=a}^{b-1}P_n(x(s_i))_qP_m(x(s_i))_q\rho(s_i)\Delta x(s_i-\frac{1}{2})=\delta_{nm}d_n^2, s_{i+1}=s_i+1,$$

donde $\rho(s)$ es una solución de una ecuación tipo Pearson.

TTRR

El hecho de que sean ortogonales nos garantiza una relación de recurrencia a tres términos

$$x(s)P_n(x(s))_q=\alpha_nP_{n+1}(x(s))_q+\beta_nP_n(x(s))_q+\gamma_nP_{n-1}(x(s))_q,$$

donde α_n, β_n and γ_n son constantes.

$$\alpha_n=-\frac{B_n \quad \lambda_n\,[2n]_q[2n+1]_q}{B_{n+1}[n]_q\,\lambda_{2n} \quad \lambda_{2n+1}}$$

donde λ_k son los autovalores asociados a los polinomios $P_k(x(s))_q$

$$\lambda_k=-[n]_q\left\{\frac{q^{\frac{n-1}{2}}+q^{-\frac{n-1}{2}}}{2}\widetilde{\tau}'+[n-1]_q\frac{\widetilde{\sigma}''}{2}\right\}.$$

Fórmulas de diferenciación

$$\sigma(s)\frac{\nabla P_n(x(s))_q}{\nabla x(s)} = \frac{\lambda_n}{[n]_q}\frac{\tau_n(s)}{\tau_n'}P_n(x(s))_q - \frac{\alpha_n\lambda_{2n}}{[2n]_q}P_{n+1}(x(s))_q,$$

y

$$[\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2})]\frac{\Delta P_n(x(s))_q}{\Delta x(s)} = \frac{\gamma_n\lambda_{2n}}{[2n]_q}P_{n-1}(x(s))_q +$$

$$\left[\frac{\lambda_n}{[n]_q}\frac{\tau_n(s)}{\tau_n'} - \lambda_n\Delta x(s-\tfrac{1}{2}) - \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q}(x(s)-\beta_n)\right]P_n(x(s))_q.$$

Las soluciones son de la forma

$$P_n(s)_q = D_n\ {}_4\phi_3\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{array} ; q\ ,\ q\right),$$

donde D_n es una constante y la serie hipergeométrica básica

$${}_r\phi_p\left(\begin{array}{c} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_p \end{array} ; q\ ,\ z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(b_1;q)_k\cdots(b_p;q)_k}\frac{z^k}{(q;q)_k}\left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)}\right]^{p-r+1},$$

y

$$(a;q)_k = \prod_{m=0}^{k-1}(1-aq^m),$$

Funciones ortonormalizadas

$$\varphi_n(s) = \sqrt{\rho(s)/d_n^2} P_n(x(s))_q.$$

Para estas funciones se tiene

$$\sum_{s_i=a}^{b-1} \varphi_n(s_i)\varphi_m(s_i)\Delta x(s_i - \frac{1}{2}) = \delta_{nm}.$$

De hecho, la ecuación en diferencias que ahora verifican es de la forma

$$\begin{aligned} H(s,n) = & \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)}\tfrac{1}{\Delta x(s)} \\ & + \sqrt{\Theta(s-1))\sigma(s)}\frac{1}{\nabla x(s)} \\ & - \left(\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} - \lambda_n \Delta x(s - \tfrac{1}{2})\right), \end{aligned}$$

donde $\Theta(s) = \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})$.

Verifican tambien una TTRR

$$\alpha_n \frac{d_{n+1}}{d_n}\varphi_{n+1}(s) + \alpha_{n-1}\frac{d_n}{d_{n-1}}\varphi_{n-1}(s) + (\beta_n - x(s))\varphi_n(s) = 0,$$

Método de Factorización

Proposición 1 *The operator $H(s,n)$ is self adjoint.*

Si ahora definimos los operadores

$$L^+(s,n) = u(s,n)I + \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)}\frac{1}{\nabla x(s)}E^-,$$
$$L^-(s,n) = v(s,n)I + \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)}\frac{1}{\Delta x(s)}E^+,$$

donde

$$u(s,n) = \frac{\lambda_n}{[n]_q}\frac{\tau_n(s)}{\tau_n'} - \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)},$$
$$v(s,n) = -\frac{\lambda_n}{[n]_q}\frac{\tau_n(s)}{\tau_n'} + \lambda_n \Delta x(s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q}(x(s)-\beta_n) - \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)}.$$

Proposition 1 *Los operadores creación $L^+(s,n)$ y destrucción $L^-(s,n)$ son operadores adjuntos uno del otro.*

Proposición 2 *Las funciones $u(s,n)$ y $v(s,n)$ satisfacen la relación*

$$u(s+1,n) = v(s,n+1).$$

Por definición de dichos operadores, satisfacen las siguientes relaciones

$$H(s,n)\varphi_n(s) = 0,$$

$$L^+(s,n)\varphi_n(s) = \alpha_n \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q}\frac{d_{n+1}}{d_n}\varphi_{n+1}(s),$$

$$L^-(s,n)\varphi_n(s) = \gamma_n \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q}\frac{d_{n-1}}{d_n}\varphi_{n-1}(s) = \alpha_{n-1}\frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q}\frac{d_n}{d_{n-1}}\varphi_{n-1}(s).$$

Resultado Principal

Teorema 3 *El operador $H(s,n)$, correspondiente a la ecuación en diferencias asociado a las funciones ortonormales $\varphi_n(s)$, admite la siguiente factorización –usualmente llamada la Factorización de tipo Infeld-Hull–*

$$u(s+1,n)H(s,n) = L^-(s,n+1)L^+(s,n) - h^{\mp}(n)I,$$

y

$$u(s,n)H(s,n+1) = L^+(s,n)L^-(s,n+1) - h^{\mp}(n)I,$$

respectivamente.

Ejemplos

Ahora aplicaremos este resultado a algunas familias de q-polinomios ortogonales cuyo interés aparece en ciertas ramas de la física matemática tales como el oscilador armónico, representación de grupos y álgebras de Lie, etc.

1 The Al-Salam & Carlitz functions I and II

Estos polinomios aparecen en ciertos modelos de q-osciladores armonicos. Los datos de esta familia son

$$\widetilde{\sigma}'' = 1,\ \widetilde{\sigma}'(0) = -\frac{a+1}{2},\ \widetilde{\sigma}(0) = a, \quad \tau_n' = \frac{q^{\frac{1}{2}-n}}{1-q},\ \tau_n(0) = q^{\frac{1-n}{2}}\frac{a+1}{q-1}.$$

$$\lambda_n = [n]_q\frac{q^{1-n/2}}{q-1} \ \text{ y } \ \alpha_n = 1,\ \beta_n = (1+a)q^n,\ \gamma_n = aq^{n-1}(q^n-1),$$

Funciones ortonotmales

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{(qx, a^{-1}qx; q)_\infty(-a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(q;q)_n(q,a,q/a;q)_\infty}}\,{}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c|c} q^{-n}, x^{-1} & \\ & q; \dfrac{qx}{a} \\ 0 & \end{array}\right).$$

Hamiltoniano

$$H(x,n)= \frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)}}{x(1-q^{-1})}E^{-}+ \frac{\sqrt{a(qx-1)(qx-a)}}{x(q-1)}E^{+}$$
$$+\left(\frac{q^{1-n}}{1-q}x+\frac{q(a+1)}{q-1}-\frac{[2]_q}{k_q}x^{-1}\right)I,$$

Operadores creacion y destrucción

$$L^{+}(x,n) = u(x,n)I+q\frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)}}{x(q-1)}E^{-},\ E^{-}f(x)=f(q^{-1}x),$$

y

$$L^{-}(x,n) = v(x,n)I+\frac{\sqrt{a(qx-1)(qx-a)}}{x(q-1)}E^{+},\ \ E^{+}f(x)=f(qx),$$

donde $u(x,n)=\frac{aq}{1-q}x^{-1}$.

Con tales operadores, obtenemos

$$L^{-}(x,n+1)L^{+}(x,n) = \frac{aq^{1-n}(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2}I+v(x,n+1)H(x,n),$$

y

$$L^{+}(x,n-1)L^{-}(x,n) = \frac{aq^{2-n}(q^{n}-1)}{(q-1)^2}I+u(x,n-1)H(x,n),$$

2 The Askey–Wilson functions

Esta familia está definida sobre la red no lineal

$$x(s)=\frac{1}{2}(q^{s}+q^{-s})\equiv x.$$

Y sus parámetros son

$$\sigma(s) = -q^{-2s+1/2}\kappa_q^2(q^s-a)(q^s-b)(q^s-c)(q^s-d), \quad \kappa_q=(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})$$

y $\tau(x)=\widetilde{\tau}(x)=\tau' x+\tau(0)$, donde

$\tau'=4(q-1)(1-abcd),\ \tau(0)=2(1-q)(a+b+c+d-abc-abd-acd-bcd).$

Esta familia satisface una condición de ortogonalidad del tipo

$$\int_{-1}^{1} \omega(x) p_n(x; a, b, c, d) p_m(x; a, b, c, d) \sqrt{1 - x^2} \kappa_q dx = \delta_{nm} d_n^2,$$

donde $q^s = e^{i\theta}$, $x = \cos\theta$,

$$\omega(x) = \frac{h(x, 1) h(x, -1) h(x, q^{\frac{1}{2}}) h(x, -q^{\frac{1}{2}})}{2\pi \kappa_q (1 - x^2) h(x, a) h(x, b) h(x, c) h(x, d)},$$

y

$$h(x, \alpha) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 - 2\alpha x q^k + \alpha^2 q^{2k}].$$

La norma para dicha familia es de la forma

$$d_n^2 = \frac{(abcdq^{n-1}; q)_n (abcdq^{2n}; q)_\infty}{(q^{n+1}, abq^n, acq^n, adq^n, bcq^n, bdq^n, cdq^n; q)_\infty}.$$

Y al igual que el ejemplo anterior satisface una TTRR con coeficientes

$$\alpha_n = 1, \quad \beta_n = \frac{a + a^{-1} - (A_n + C_n)}{2}, \quad \gamma_n = \frac{C_n A_{n-1}}{4},$$

where A_n, C_n are defined by

$$A_n = \frac{(1 - abq^n)(1 - acq^n)(1 - adq^n)(1 - abcdq^{n-1})}{a(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})},$$

$$C_n = \frac{a(1 - q^n)(1 - bcq^{n-1})(1 - bdq^{n-1})(1 - cdq^{n-1})}{(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})},$$

Sus autovalores son $\lambda_n = 4q^{-n+1}(1 - q^n)(1 - abcdq^{n-1})$. Con todo lo anterior los parámetros que necesitamos son

$$\widetilde{\sigma}'' = -4(q - 1)^2 (1 + abcd) q^{-1/2},$$

$$\widetilde{\sigma}'(0) = (q - 1)^2 (a + b + c + d + abc + abd + acd + bcd) q^{-1/2},$$

$$\widetilde{\sigma}(0) = (q - 1)^2 (1 - ab - ac - ad - bc - bd - cd + abcd) q^{-1/2},$$

$$\tau_n' = 4q^{-n}(q - 1)(1 - abcdq^{2n}),$$

$$\tau_n(0) = 2(q - 1)(-a - b - c - d + (abc + abd + acd + bcd) q^n) q^{-n/2}.$$

Operadores creación y destrucción

$$L^{+}(s,n)=u(s,n)I+\frac{2q^{3/2}}{[2s-1]_q}G(s,a,b,c,d)E^{-},$$

$$L^{-}(s,n)=v(s,n)I+\frac{2q^{3/2}}{[2s+1]_q}G(s+1,a,b,c,d)E^{+},$$

donde $E^{-}f(s)=f(s-1)$ and $E^{+}f(s)=f(s+1)$,

$$u(s,n)=D_n x_n(s)+D_n E_n+q^{-2s+1/2}\frac{(q^s-a)(q^s-b)(q^s-c)(q^s-d)}{[2s-1]_q}$$

con

$$D_n=-4q^{-n/2+1/2}(q-1)(1-abcdq^{n-1}).$$

$$E_n=\frac{(-a-b-c-d+(abc+abd+acd+bcd)q^n)q^{n/2}}{2(1-abcdq^{2n})}.$$

y

$$G(s,a,b,c,d)=\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(1-2q^{s_i}q^{-1/2}x(s-1/2)+q^{-1}q^{2s_i})}.$$

Finalmente, con todo lo anterior obtenemos

$$L^{-}(s,n+1)L^{+}(s,n)=D_{2n}D_{2n+2}\gamma_{n+1}I+v(s,n+1)H(s,n),$$

y

$$L^{+}(s,n-1)L^{-}(s,n)=D_{2n-2}D_{2n}\gamma_n I+u(s,n-1)H(s,n),$$

que es la formula de factorización asociada a las funciones ortonormales asociada a esta familia de q-polinomios ortogonales.