Seminario UAL

A first study of Zeros of Classical Orthogonal Polynomial

Roberto S. Costas Santos

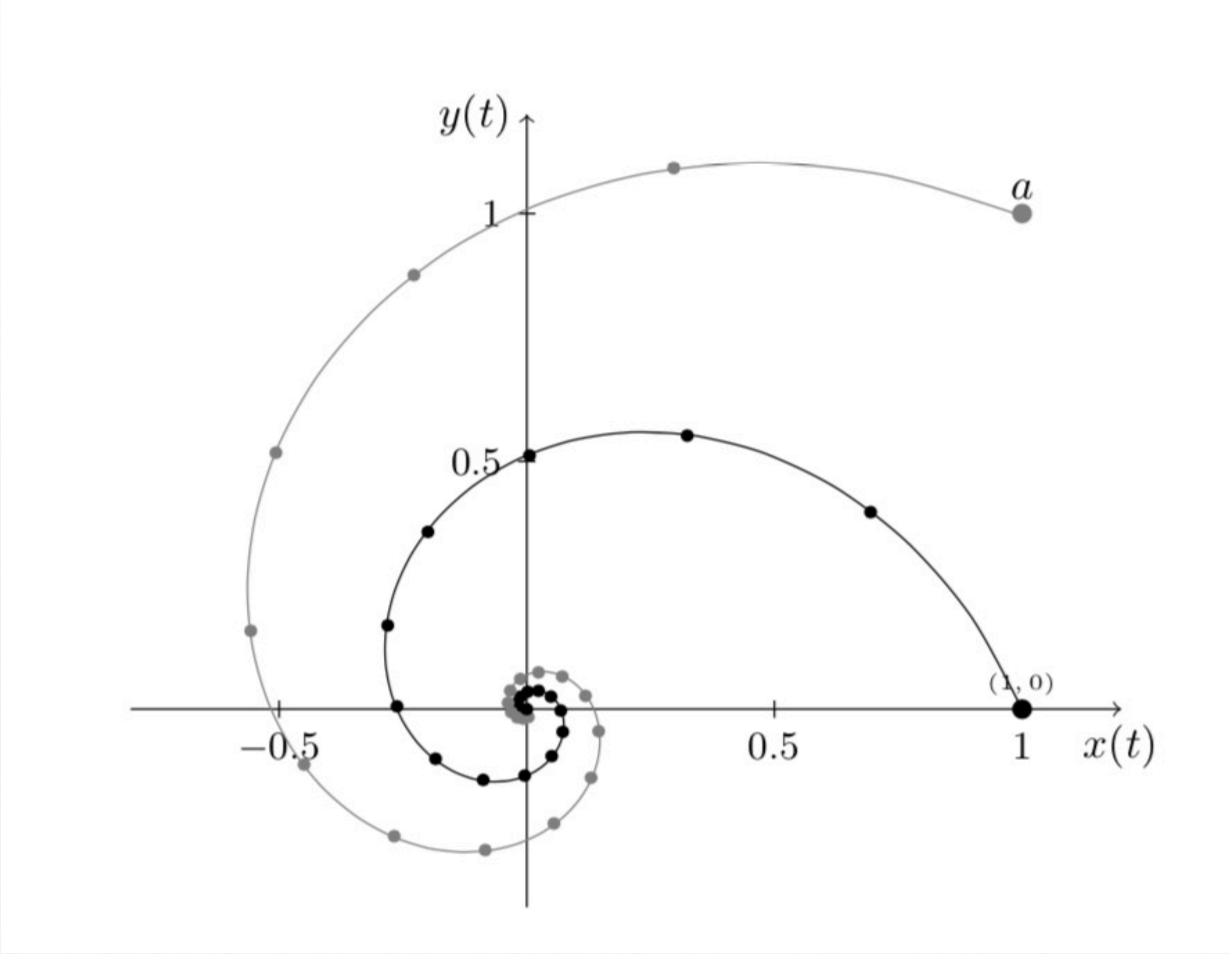
Dpto. Física y Matemáticas

Universidad de Alcalá

Almería, 8 de marzo de 2018

Objetivos

- Conexión de la cuadratura Gaussiana y los polinomios ortogonales en $\mathbb{R}$.
- Nuevas expresiones de los polinomios ortogonales.
- Ceros comúnes.
- Entrelazamiento en $\mathbb{C}$.



La ortogonalidad

- Comenzamos considerando un funcional lineal **u.**
- Consideramos P_n=ops(**u**).
- Asumimos que dicho funcional es hermitiano, por tanto satisface

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

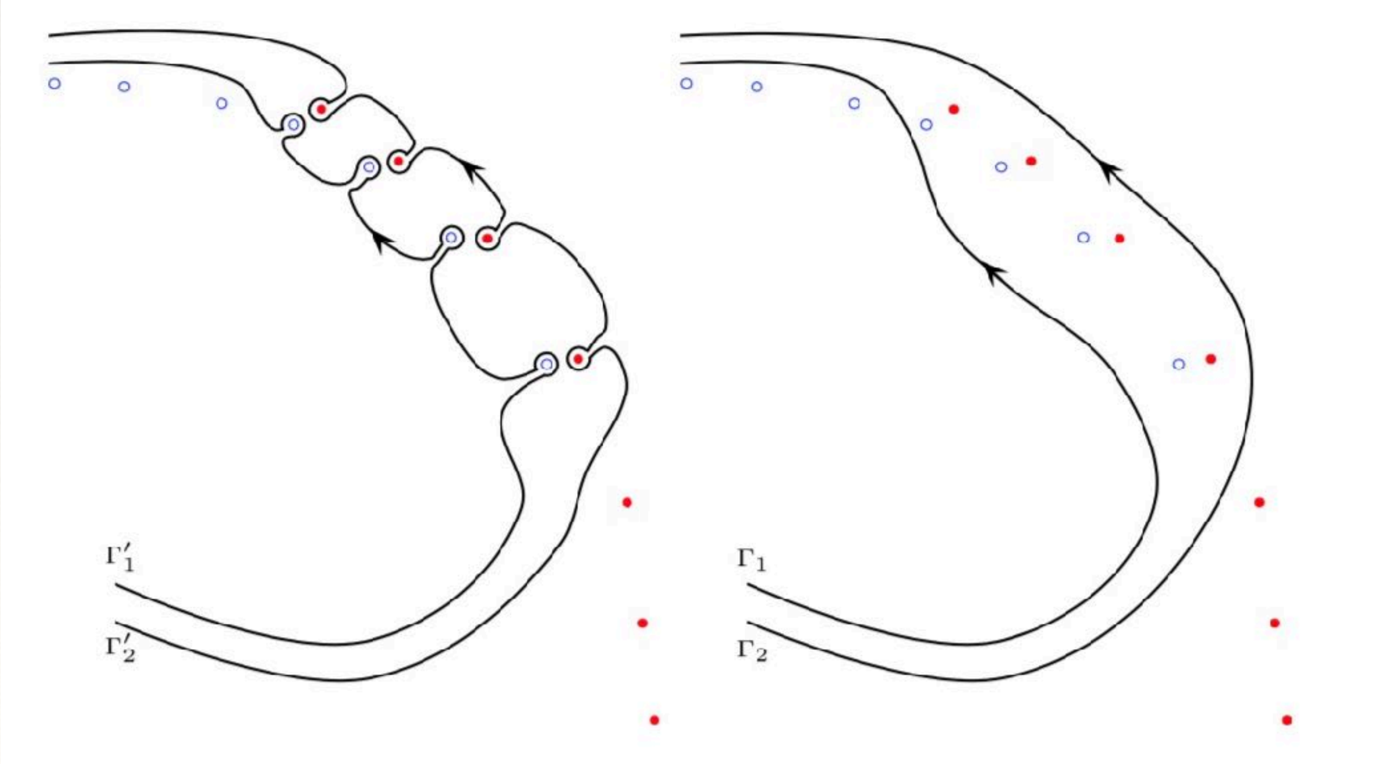
- Si los ceros de P_n son $\{x_{n,j}\}_{j=1}^{n}$, entonces para cada N

$$\mathbf{u}_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p'_N(x_{N,j})p_{N-1}(x_{N,j})}\,\delta_{x_{N,j}}$$

ortogonalidad y cuadraturas

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_\Gamma \frac{p(z)}{p_N(z) p_{N-1}(z)} \, dz$$

donde la curva tiene los ceros de P_n dentro y los ceros de P_{n+1} fuera.



Representación matricial de los polinomios

Theorem *Given a linear form $\mathscr{L}$, if $\mathscr{L}$ is quasi-definite then for any $0 \leq k \leq N$, the following identity holds:*

$$p_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} & \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \cdots & \mathbf{u}_{2k-1} \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

Corollary *For $0 \leq k \leq N$, the Hankel matrix*

$$H_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} & \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \cdots & \mathbf{u}_{2k-1} \\ \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \mathbf{u}_{k+2} & \cdots & \mathbf{u}_{2k} \end{bmatrix}$$

can be computed explicitly in terms of the zeros of $p_N(x)$.

Ceros comúnes entre polinomios

Corollary *A zero of* $p_N(z)$, x_{Nj} *is a zero of* $p_k(s)$ *if and only if*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} & \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \cdots & \mathbf{u}_{2k-1} \\ 1 & x_{Nj} & x_{Nj}^2 & \cdots & x_{Nj}^k \end{bmatrix} = 0.$$

Entrelazamiento

PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 100, Number 3, July 1987

INTERLACING POLYNOMIALS

CHARLES R. JOHNSON

THEOREM. *If A is an n-by-n Hermitian matrix, then*

$$\operatorname{Int}(p_A(\lambda)) = F(\operatorname{adj}(\lambda I - A)).$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$F(A) = \{x^* A x \colon x^* x = 1, x \in C^n\}.$$

$$\mathbf{A}\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\,\mathbf{I}\,.$$

¿Cómo puede extenderse este resultado?

GRACIAS POR VUESTRA ATENCIÓN