Presentando los polinomios ortogonales clásicos

UN PASEO POR LAS GALAXIAS HIPERGEOMÉTRICAS

Roberto S. Costas-Santos. Dpto. Métodos Cuantitativos

11 junio 2025

Universidad LOYOLA

¿Qué es una función hipergeométrica?

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$xy''(x) + (1+\alpha - x)y'(x) + 7y(x) = 0$$

Si f(x) es una solución, entonces es sencillo comprobar que f'(x) es solución de

$$xy''(x) + (1+(\alpha+1) - x)y'(x) + 6y(x) = 0$$

$$y(x) = x^7 - 49x^6 - 7\alpha x^6 + 882x^5 + 273\alpha x^5 + 21\alpha^2 x^5 + 7350x^4 - 3745\alpha x^4 - 630\alpha^2 x^4 - 35\alpha^3 x^4 + \cdots$$

$$y(x) = L_7^{(\alpha)}(x) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} -7 \\ \alpha+1 \end{matrix}\ ; x\right)$$

¿Dónde aparecen estas funciones hipergeométricas?

1. **Física matemática y mecánica cuántica**
   - Soluciones de la ecuación de Schrödinger para átomos de hidrógeno y potenciales centrales.
   - Armónicos esféricos y polinomios asociados (ej. polinomios de Jacobi).
   - Funciones de onda en potenciales exponencial, Coulombiano o armónico.
   - Problemas de difusión y ecuaciones de transporte.
2. **Teoría de la probabilidad y estadística**
   - Distribución hipergeométrica en muestreo sin reemplazo.
   - Cálculo de momentos y funciones generadoras de distribuciones discretas y continuas.
   - Ciertos problemas estocásticos, y cadenas de Markov.
3. **Polinomios ortogonales y sistemas especiales de funciones**
   - Polinomios de Jacobi, Legendre, Laguerre y Hermite pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas.
   - Desarrollo de series ortogonales en teoría de aproximación y cuadraturas de Gauss.
4. **Ecuaciones diferenciales y teoría de integrales**
   - Solución de la ecuación diferencial de Gauss (segunda orden con tres singularidades regulares).
   - Representación de integrales elípticas y beta, integrales de Mellin–Barnes.
   - Evaluación de integrales especiales en análisis complejo.
5. **Geometría algebraica y teoría de representaciones**
   - Conexiones con variedades de Calabi–Yau (mirror symmetry) y períodos de formas diferenciales.
   - Representaciones de grupos de Lie y álgebras de tipo A,B,C,D (funciones de Kummer, Whittaker).
6. **Física estadística y sistemas integrables**
   - Funciones de partición de modelos de percolación y variables aleatorias en redes.
   - Soluciones de modelos de campo medio y correlaciones en cadenas de espines.
7. **Combinatoria y teoría de números**
   - Sumatorios hipergeométricos (identidades de Chu–Vandermonde, Saalschütz).
   - Relaciones con coeficientes binomiales generalizados y particiones.
8. **Ingeniería y otras áreas aplicadas**
   - Propagación de ondas en medios estratificados (acústica, electromagnetismo).
   - Análisis de señales, filtros digitales y transformadas integrales.
   - Problemas de control y optimización con ecuaciones especiales.

Algo de historia de las funciones hipergeométricas

1.**1782** – Adrien-Marie **Legendre**
- Introduce los “polinomios de Legendre” al estudiar la expansión en series de potencias de la ley de gravitación y potenciales esféricos.

2.**1812** – Pierre-Simon **Laplace**
- Utiliza polinomios de Legendre en la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, popularizando su importancia en física matemática.

3.**1859** – Pafnuty **TChebyshev**
- Define los “polinomios de Chebyshev” (T_n y U_n), estudiando su aproximación de funciones y minimización del error máximo (problema de minimax).

4.**1864** – Charles **Hermite**
- Introduce los “polinomios de Hermite” al resolver la ecuación diferencial de la oscilación armónica cuántica y problemas de probabilidad gaussiana.

5.**1875** – Edmond **Laguerre**
- Publica los “polinomios de Laguerre” al abordar integrales en la teoría de errores y expansiones en series para funciones con decaimiento exponencial.

6.**1880** – Carl Gustav **Jacobi**
- Extiende a los polinomios de Legendre y Chebyshev con los “polinomios de Jacobi estableciendo un marco unificado de ortogonalidad con peso $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

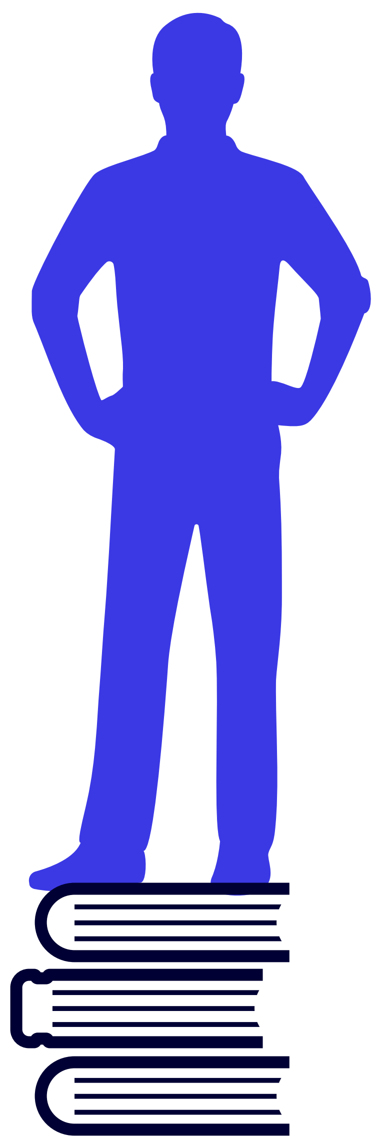
7.Finales del s. XIX – **Teoría de Sturm–Liouville**
- Sturm y Liouville formalizan la caracterización de sistemas ortogonales como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones de contorno.

8.**1874–1889** – **Christoffel y Darboux**
- Gaston Darboux y Elwin Christoffel desarrollan fórmulas de recurrencia y los núcleos (Christoffel–Darboux), esenciales para la teoría general de ortogonalidad.

9.**1920–1930** – **Teoría de momentos** y **relaciones de recurrencia**
- Matemáticos como **Shohat**, **Hamburger** y **Stieltjes** vinculan polinomios ortogonales con momentos (integrales de potencias) y sistemas de recurrencia lineal.

10.Siglos XX y XXI – **Esquema de Richard Askey** y aplicaciones
- **Richard Askey** (1933—2019) y **George Gasper** clasifican familias hipergeométricas y q-ortogonales (p.ej. polinomios de **Askey**–**R. Wilson**).
- Uso intensivo en análisis numérico, física estadística, teoría de la señal y modelos estocásticos.

¿No falta alguien?



Johann Carl Friedrich *Gauß* (AKA *Gauss*)

Nacio en Brunswick (1777) y falleció en Göttingen 1855.

Sus aportaciones fueron cruciales para el desarrollo y uso de las funciones hipergeométricas:

1. **Cuadratura Gaussiana** (ca. **1815**)

   • Gauss ideó un método de integración numérica de precisión óptima en el que los nodos de integración son exactamente las raíces de los polinomios de **Legendre**. (Esto puso de relieve la importancia práctica de los polinomios ortogonales en la aproximación numérica).

2. Estudios en **series hipergeométricas**
   • Aunque no formuló "polinomios ortogonales" per se, Gauss sistematizó la función hipergeométrica ${}_2F_1$, de la cual se derivan muchas familias ortogonales (Jacobi, Laguerre, Hermite); ademas sentó las bases para entender las relaciones de recurrencia y ciertas **ecuaciones diferenciales de segundo orden**.

3. **Método de los Mínimos Cuadrados** (ca. **1795-1809**)
   • Desarrolló el principio de ajuste por mínimos cuadrados (publicado en 1809), para el cual se construyen sistemas de ecuaciones normales que, en su forma continua, se conectan con proyecciones ortogonales en espacios de polinomios.

Función hipergeométrica de *Gauss*

$$F(a,b,c,x) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array} ; x \right) = \sum_{k=0}^{a} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

donde

$$(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

$$x(1-x)y''(x) + \big(c - (a+b+1)x\big)y'(x) - ab\, y(x) = 0$$

Polinomios de Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right)$$

$$\left(1-x^2\right) y''(x) + (\beta-\alpha+x(\alpha+\beta+2))y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] = \frac{n(1+\alpha+\beta+n)}{2(1+\alpha)} p_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx = h_n(\alpha,\beta)\delta_{n,m}.$$

Ecuación diferencial de Pearson

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right) = \left(\beta-\alpha+x(2+\alpha+\beta)\right)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

$$\left(1-x^2\right)y''(x) + (\beta-\alpha+x(\alpha+\beta+2))y'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)y(x) = 0$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \lambda_n(\alpha,\beta)\frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

Relaciones de recurrencia y la matriz de Jacobi

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha_n x P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

con condiciones iniciales $\gamma_n = 0, \quad P_0(x) = 1$

Teorema de Favard (Shohat)

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathrm{J} \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \ddots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

J es una mariz tridiagonal, doblemente infinita, y suele ser doblemente estocastica.

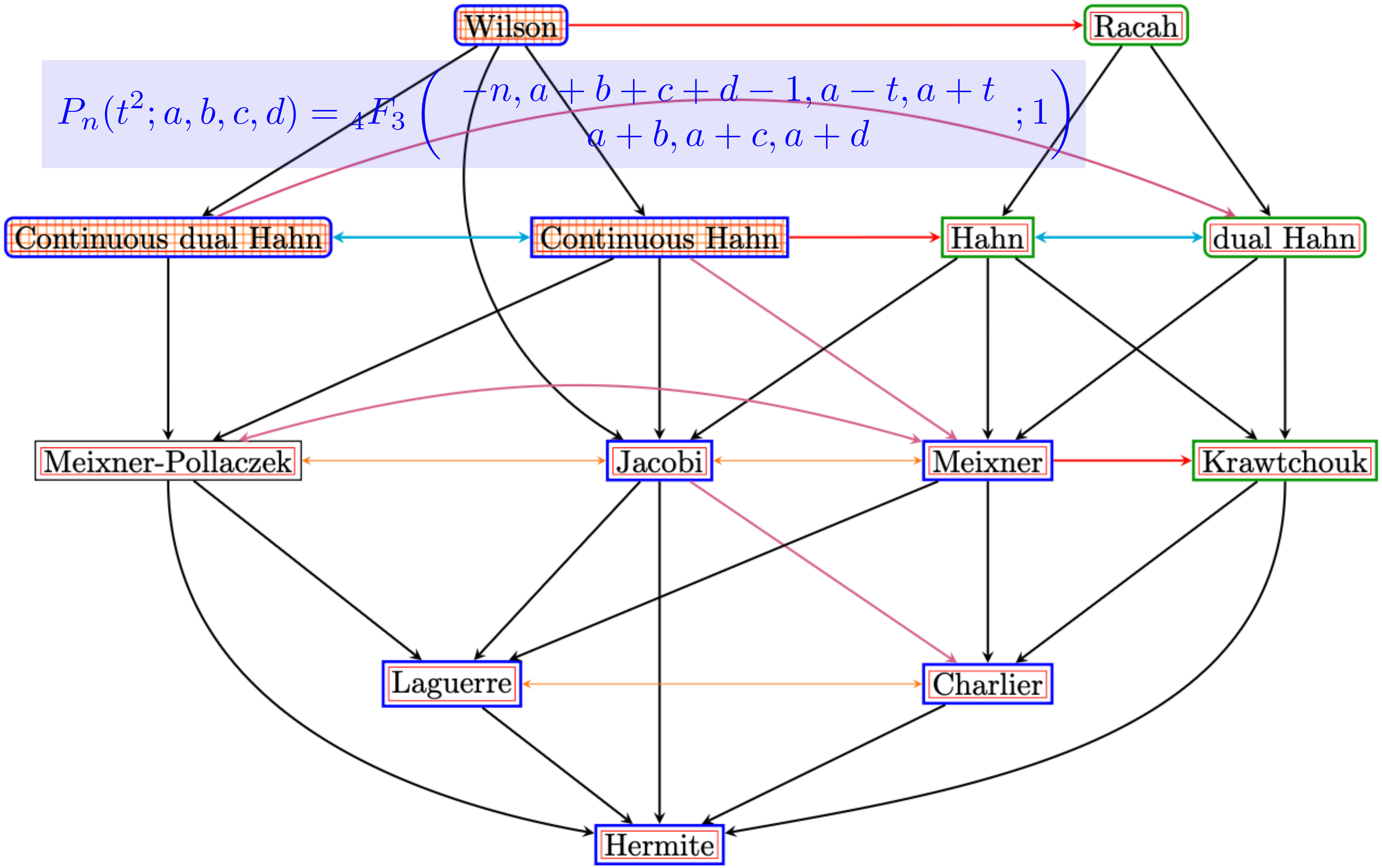
Y ... ¿cuándo aparecen las constelaciones?

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\right) = \left(\beta-\alpha+x(2+\alpha+\beta)\right)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x)\omega(x)\right] = \psi(x)\omega(x) \qquad \deg\phi \le 2, \quad \deg\psi = 1$$

Esquema de R. Askey

$$P_n(t^2;a,b,c,d) = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a+b+c+d-1, a-t, a+t \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1\right)$$



$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x)\omega(x)\right] = \psi(x)\omega(x)$$

$$\deg\phi \leq 2, \quad \deg\psi = 1$$

$$\Delta\left[\phi(x)\omega(x)\right] = \psi(x)\omega(x)$$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\mathcal{D}_q\left[\phi(x)\omega(x)\right] = \psi(x)\omega(x)$$

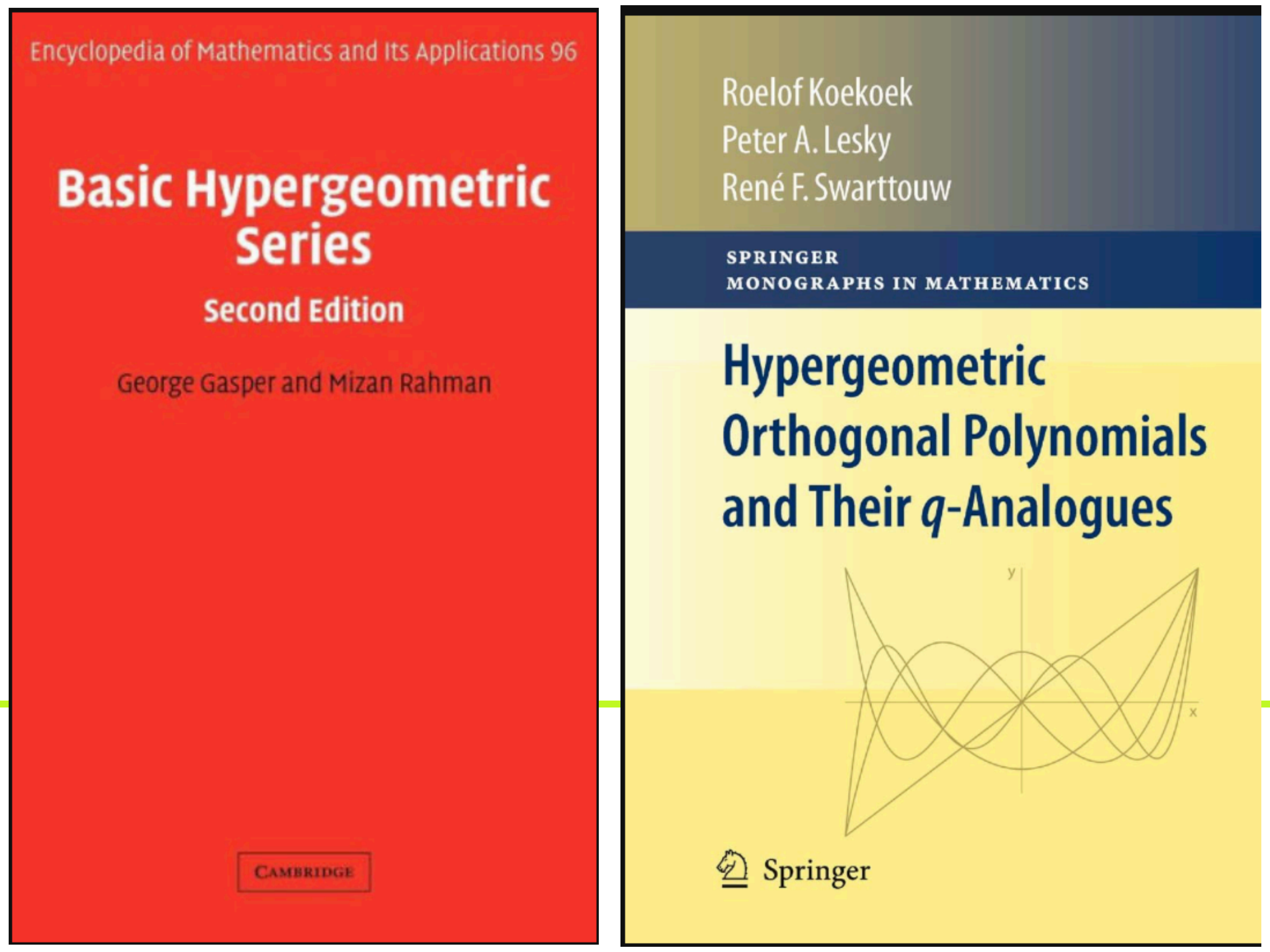
$$\mathcal{D}_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{x(q-1)}$$

Extension natural de funciones hipergeométricas

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} ; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_r)_k}{(b_1)_k \cdots (b_s)_k} \frac{x^k}{k!} $$

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} ; q, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_s;q)_k} \frac{x^k}{(q;q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{n}{2}}\right)^{s+1-r} $$

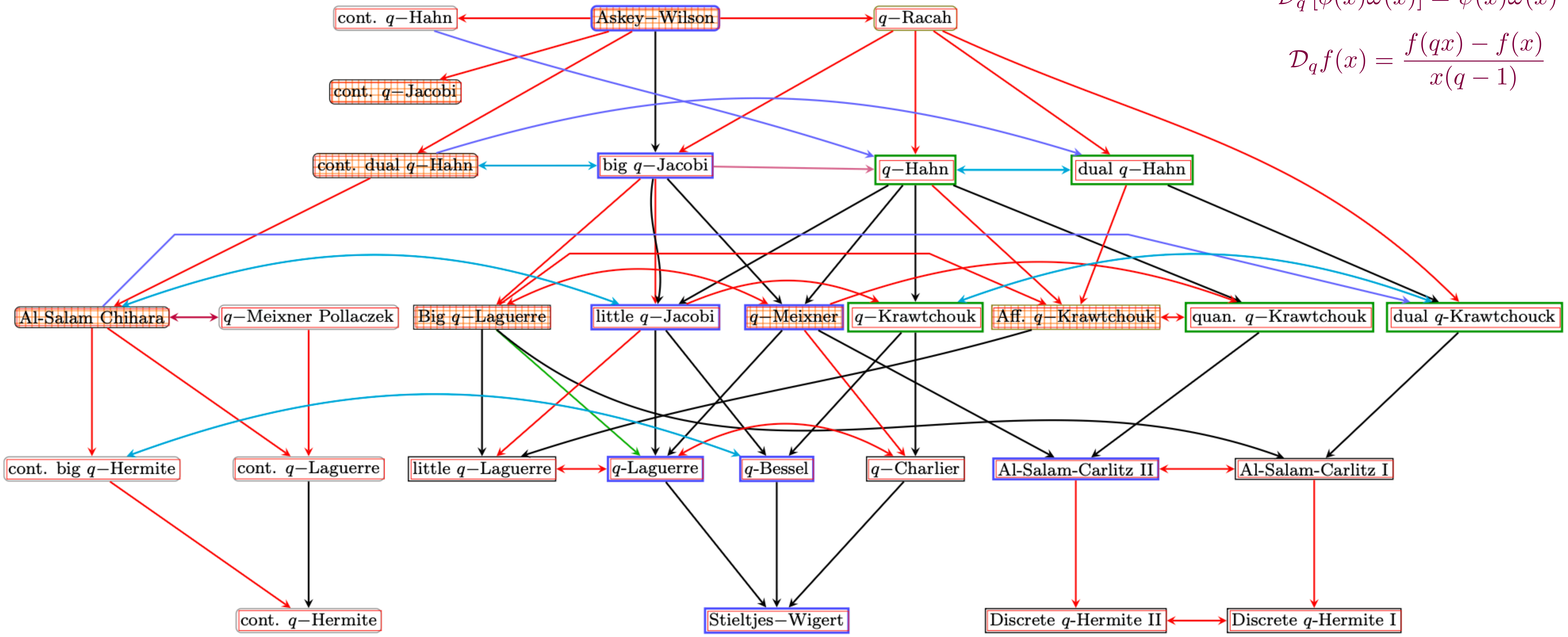
donde $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$



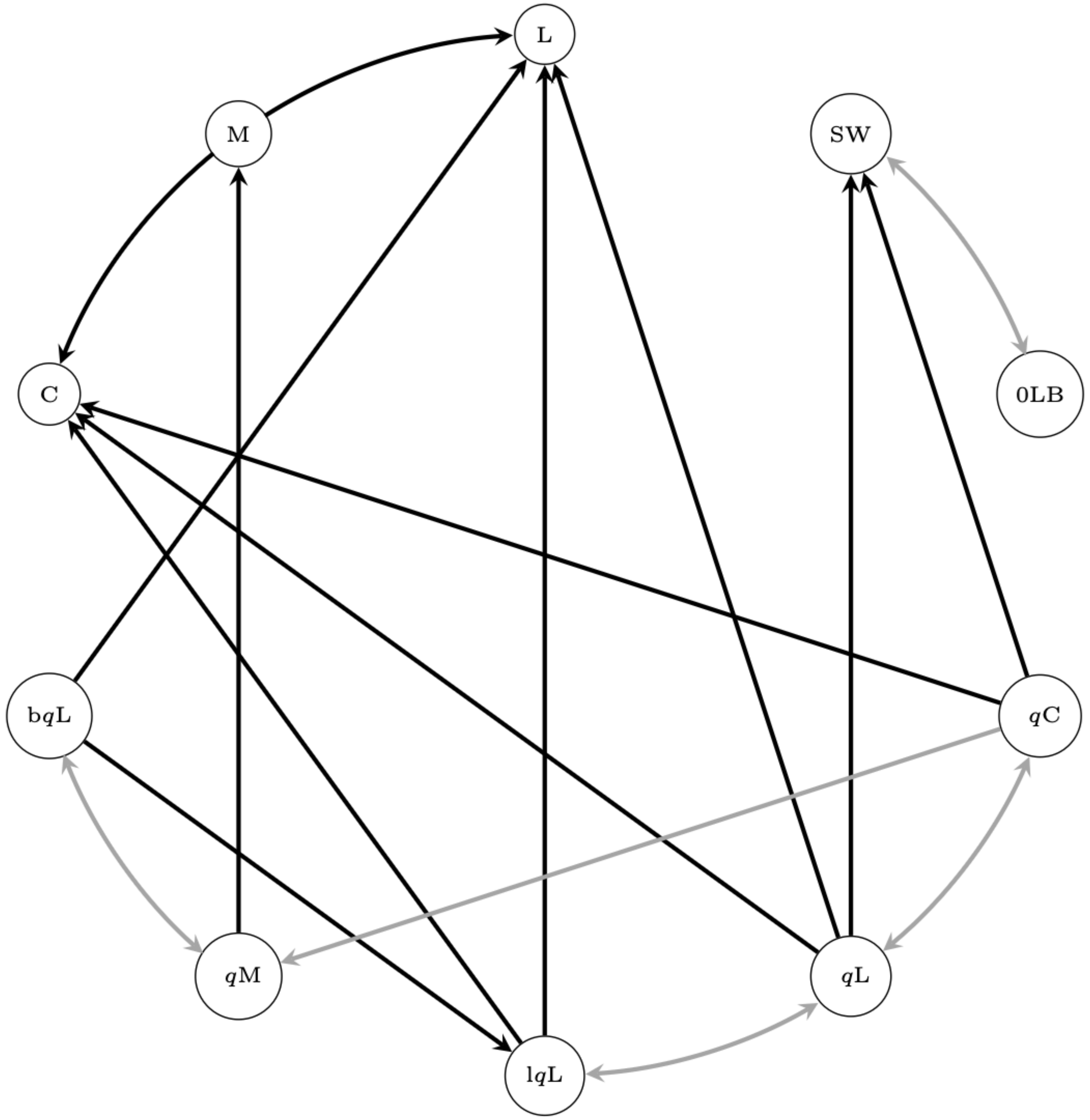
Esquema de polinomios hipergeométricos básicos

$$\mathcal{D}_q\left[\phi(x)\omega(x)\right] = \psi(x)\omega(x)$$

$$\mathcal{D}_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{x(q-1)}$$



Constelación de Laguerre



En el sentido contrario de las agujas del reloj:

Laguerre, Meixner, Charlier, big q-**Laguerre**, q-Meixner, little q-**Laguerre**, q-**Laguerre**, q-Charlier, Stieltjes-Weiger, 0 **Laguerre**-Bessel

THE LAGUERRE CONSTELLATION OF CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

BY ROBERTO S. COSTAS-SANTOS, **MATHEMATICS 2025**, 13(2), 277;

HTTPS://DOI.ORG/10.3390/MATH13020277

ACCEPTED: 14 JANUARY 2025 / PUBLISHED: 16 JANUARY 2025

Constelación de Laguerre. Caso Meixner

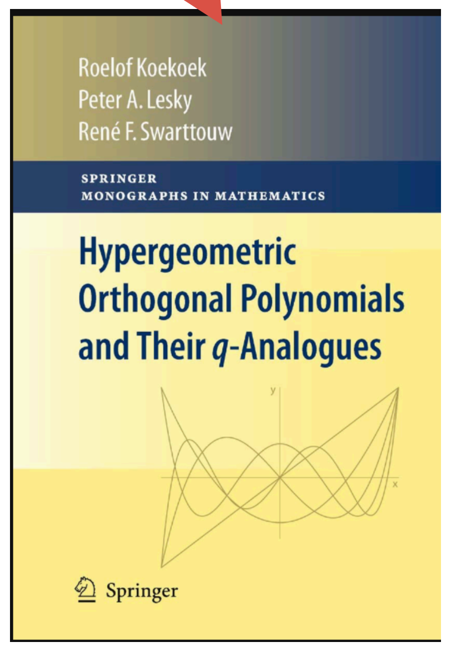
$$M_n(x;\beta,c) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ \beta \end{matrix}\; ; 1-\frac{1}{c}\right)$$

Theorem 4.4. *For any $\beta, c \in \mathbb{C}$, any $x \in \mathbb{C}$, $x \notin \{0, -\beta\}$, and any $n \in \mathbb{N}_0$, the polynomial sequence $\left(M_n(x;\beta+k,c)\right)_k$ is orthogonal with respect to certain moment functional.*

Proof. By combining (4.29), (4.30) and (4.31) we have the following second order difference equations:

$$nxM_n(x;\beta,c) = \frac{\beta(\beta-1)}{c-1}\nabla_\beta\Delta_\beta M_n(x;\beta,c) - \left(\frac{\beta(\beta-1)}{c-1} + (\beta+x)(\beta+n)\right)\Delta_\beta M_n(x;\beta,c), \quad (4.34)$$

which is connected with the Continuous Hahn polynomials case (see [?, (9.4.5)]). By using the theory of Sturm-Liouville, the result holds. ■



Lemma 4.4. *For any $\beta, c \in \mathbb{C}$, $\beta \notin \{0,2\}$, $c \notin \{0,1\}$, and any $n \in \mathbb{N}_0$, the following identities hold:*

$$\frac{\beta c}{c-1}\Delta_n M_n(x;\beta,c) = x\,M_n(x-1;\beta+1,c), \quad (4.26)$$

$$M_n(x;\beta,c) + \frac{c}{c-1}\Delta_n M_n(x;\beta,c) = \frac{x+\beta}{\beta}\,M_n(x;\beta+1,c), \quad (4.27)$$

$$M_n(x;\beta,c) + \frac{1}{c-1}\nabla_n M_n(x;\beta,c) = \frac{x+\beta}{\beta}\,M_{n-1}(x;\beta+1,c), \quad (4.28)$$

$$\frac{c\beta(1-\beta)}{c-1}\nabla_\beta M_n(x;\beta,c) = xnM_{n-1}(x-1;\beta+1,c), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\beta(\beta-1)c}{(\beta+n)(c-1)}M_{n+1}(x+1;\beta-1,c) &= \left(x+\beta+\frac{\beta(\beta-1)}{(\beta+n)(c-1)}\right)M_n(x;\beta,c)\\ &\quad + (x+\beta)\Delta_\beta M_n(x;\beta,c), \quad (4.30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\beta-1)(\beta-2)c}{(\beta-1+n)(c-1)}M_{n+1}(x+1;\beta-2,c) &= \left(x+\beta-1+\frac{(\beta-1)(\beta-2)}{(\beta-1+n)(c-1)}\right)M_n(x;\beta,c)\\ &\quad - \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{(\beta-1+n)(c-1)}\nabla_\beta M_n(x;\beta,c), \quad (4.31)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}c^n(\beta)_n M_n(x;\beta,c) = \frac{n(x+\beta)}{c+n+\beta}c^n(\beta+1)_n M_{n-1}(x;\beta+1,c), \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}c(1-\beta)c^n(\beta)_n\beta M_{n+1}(x;\beta-1,c) &= c(1-c)\frac{\partial}{\partial c}c^n(\beta)_n M_n(x;\beta,c)\\ &\quad - \left((c-1)x+n-(n+1)c+c\beta\right)c^n(\beta)_n\beta M_n(x;\beta,c)\\ &\quad (4.33)\end{aligned}$$

THE LAGUERRE CONSTELLATION OF CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

BY ROBERTO S. COSTAS-SANTOS, **MATHEMATICS 2025**, 13(2), 277;

HTTPS://DOI.ORG/10.3390/MATH13020277

ACCEPTED: 14 JANUARY 2025 / PUBLISHED: 16 JANUARY 2025

Otras aplicaciones de interés

Theorem 3.2. *Let $n \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{C}^{\ddagger}$, $x = \frac{1}{2}(z+z^{-1}) \in \mathbb{C}^*$, $z \in \mathbb{C}^*$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$. Then, the Askey–Wilson polynomials have the following terminating basic hypergeometric series representations*

$$p_n(x;a,b,c,d|q) := a^{-n}(ab,ac,ad;q)_n \, {}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, az^{\pm} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right) \tag{100}$$

$$= q^{-\binom{n}{2}}(-a)^{-n} \frac{\left(\frac{abcd}{q};q\right)_{2n}(az^{\pm};q)_n}{\left(\frac{abcd}{q};q\right)_n} \, {}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, \frac{q^{1-n}}{ab}, \frac{q^{1-n}}{ac}, \frac{q^{1-n}}{ad} \\ \frac{q^{2-2n}}{abcd}, \frac{q^{1-n}}{a}z^{\pm} \end{matrix}; q, q\right) \tag{101}$$

$$= z^n(ab, cz^{-1}, dz^{-1};q)_n \, {}_4\phi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, az, bz, \frac{q^{1-n}}{cd} \\ ab, \frac{q^{1-n}}{c}z, \frac{q^{1-n}}{d}z \end{matrix}; q, q\right) \tag{102}$$

$$= z^n \frac{\left(\frac{abcd}{q};q\right)_{2n}\left(\frac{b}{z}, \frac{c}{z}, \frac{d}{z}, \frac{bcd}{qz};q\right)_n}{\left(\frac{abcd}{q};q\right)_n\left(\frac{bcd}{qz};q\right)_{2n}} \, {}_8W_7\left(\frac{q^{1-2n}z}{bcd}; q^{-n}, \frac{q^{1-n}}{bc}, \frac{q^{1-n}}{bd}, \frac{q^{1-n}}{cd}, az; q, \frac{qz}{a}\right) \tag{103}$$

$$= z^n \frac{\left(\frac{a}{z}, bc, bd, cd;q\right)_n}{(bcdz;q)_n} \, {}_8W_7\left(\frac{bcdz}{q}; q^{-n}, bz, cz, dz, q^{n-1}abcd; q, \frac{q}{az}\right) \tag{104}$$

$$= a^{-n} \frac{(ac, ad, bz^{\pm};q)_n}{\left(\frac{b}{a};q\right)_n} \, {}_8W_7\left(\frac{q^{-n}a}{b}; q^{-n}, \frac{q^{1-n}}{bc}, \frac{q^{1-n}}{bd}, az^{\pm}; q, q^n cd\right) \tag{105}$$

$$= z^n \frac{\left(\frac{a}{z}, \frac{b}{z}, \frac{c}{z}, \frac{d}{z};q\right)_n}{(z^{-2};q)_n} \, {}_8W_7\left(q^{-n}z^2; q^{-n}, az, bz, cz, dz; q, \frac{q^{2-n}}{abcd}\right). \tag{106}$$

arXiv > math > arXiv:2307.04884

Mathematics > Classical Analysis and ODEs

[Submitted on 10 Jul 2023 (v1), last revised 8 May 2025 (this version, v3)]

The q and q^{-1}-symmetric orthogonal polynomials in the q-Askey scheme, their dual polynomials and functions, orthogonality, generating functions and relations and nonterminating q-Chaundy double product representations

Howard S. Cohl, Roberto S. Costas-Santos

Otras aplicaciones de interés

Theorem 5.1. *Let* $r, s \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $u, v \in \mathbb{N}_0$, $p, \ell \in \mathbb{Z}$ *such that* $p \geq r - u$ *and* $\ell \geq s - v$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{*r+1}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{*u}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{*s+1}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^{*v}$, $q \in \mathbb{C}^{\dagger}$. *Then*

$$
\begin{aligned}
{}_{r+1}\phi_u^p\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix};q,\mathsf{X}\right)\,{}_{s+1}\phi_v^\ell\left(\begin{matrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{d}\end{matrix};q,\mathsf{Y}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{a};q)_n\mathsf{X}^n}{(q,\mathbf{b};q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{u-r+p} \\
&\quad\times {}_{s+u+2}\phi_{r+v+1}^{u-r+p+\ell}\left(\begin{matrix} q^{-n},\mathbf{c},\frac{q^{1-n}}{\mathbf{b}}\\ \mathbf{d},\frac{q^{1-n}}{\mathbf{a}}\end{matrix};q,\frac{q^{1+p(1-n)}b_1\cdots b_u\mathsf{Y}}{a_1\cdots a_{r+1}\mathsf{X}}\right) \qquad (336)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{c};q)_n\mathsf{Y}^n}{(q,\mathbf{d};q)_n}\left((-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right)^{v-s+\ell} \\
&\quad\times {}_{r+v+2}\phi_{s+u+1}^{v-s+p+\ell}\left(\begin{matrix} q^{-n},\mathbf{a},\frac{q^{1-n}}{\mathbf{d}}\\ \mathbf{b},\frac{q^{1-n}}{\mathbf{c}}\end{matrix};q,\frac{q^{1+\ell(1-n)}d_1\cdots d_v\mathsf{X}}{c_1\cdots c_{s+1}\mathsf{Y}}\right), \qquad (337)
\end{aligned}
$$

where X, Y *are given such that the left-hand side is well-defined.*

arXiv > math > arXiv:2307.04884

Mathematics > Classical Analysis and ODEs

[Submitted on 10 Jul 2023 (v1), last revised 8 May 2025 (this version, v3)]

The q and q^{-1}-symmetric orthogonal polynomials in the q-Askey scheme, their dual polynomials and functions, orthogonality, generating functions and relations and nonterminating q-Chaundy double product representations

Howard S. Cohl, Roberto S. Costas-Santos

¡Gracias por tu atención!