POLINOMIOS ORTOGONALES, APROXIMACIONES DE PADÉ Y TEORÍA DE NÚMEROS

Índice

1. Introducción

Durante este último siglo las matemáticas se han diversificado tanto que casi parece inconcebible la idea de que dos ramas de las matemáticas tan dispares como el Análisis Matemático y el álgebra conmutativa puedan coexistir a la hora de resolver un problema, pero sin embargo con este trabajo se pretende hacer ver que, efectivamente, usándolas adecuadamente nos pueden ayudar a resolver problemas como probar la irracionalidad de ciertos números reales.
Para ello utilizaremos las aproximaciones de Padé, las cuales nos permitirán, dada una función especial, i.e. una serie formal de potencias en un punto $t = t_0$[1],

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

obtener una aproximación racional de la misma de la forma

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} + \mathcal{O}(t^k + 1), \tag{1.2}$$

donde k es el grado del polinomio $P(t)$, y $Q(t)$ es el *polinomio generador* de la aproximación. Para nuestro trabajo utilizaremos una aproximación de Padé particular, la llamada *Aproximación diagonal*, que consiste en tomar tanto el polinomio numerador como el denominador del mismo grado k, y es en este caso tan particular, donde surgen los polinomios ortogonales, ya que los polinomios generadores de la aproximación verifican una relación de recurrencia a tres términos que nos lleva a poder decir que tales generadores forman una familia de polinomios ortogonales[2], y es por esa razón, además de la del propio interés por conocer conceptos nuevos en mátemáticas.
Por la que previamente daremos una noción general de lo que es un polinomio ortogonal tanto en el caso continuo como en el caso discreto (con especial énfasis en los q-polinomios) viendo muchas de sus propiedades, particularmente la llamada fórmula de Rodrigues ya que ésta junto con la condición de que verifiquen la ecuación diferencial de segundo orden

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1.3}$$

donde σ y τ son polinomios, a lo más, de segundo y primer grado respectivamente, nos permite crear toda la teoría de los polinomios ortogonales clásicos.
Posteriormente discretizaremos la ecuación (1.3) en una red no uniforme de la forma
$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s-\mu} + c_3(q)$ donde c_1, c_2, c_3 son constantes, y veremos que es la única (red) donde tiene sentido que las diferencias finitas de orden m: $\Delta^{(m)}y$ de las soluciones de la ecuación (1.3) verifiquen una ecuación (en diferencias) del mismo tipo. A las soluciones polinómicas, de dicha ecuación, las llamaremos q-polinomios. Finalmente hablaremos sobre la red $x(s) = q^s$, haciendo especial énfasis en los llamados q-polinomios pequeños de Legendre los cuales nos permitirán junto con la teoría de Aproximación de Padé obtener aproximaciones racionales. Para finalizar este trabajo y como aplicación desarrollaremos dos ejemplos, [29], [28], en el primero veremos la aproximación de π^2 y de $\zeta(3)$ utilizando los polinomios de Legendre y en el segundo obtendremos la aproximación de $h_p(1)$ y de $\ln_p(2)$ en la que utilizaremos los q-polinomios pequeños de Legendre.

[1] Por sencillez podemos tomar $t_0 = 0$.
[2] Éste es el conocido Teorema de Favard.

2. Polinomios ortogonales clásicos y q-polinomios

2.1. La Ortogonalidad. Conceptos básicos

En este capítulo, como ya hemos mencionado anteriormente, se pretende dar una visión global del concepto de polinomio ortogonal. En primer lugar consideremos una función α absolutamente continua en el intervalo (a, b), positiva y no decreciente con un número infinito de puntos donde es estrictamente creciente, y definamos el producto escalar de dos funciones f y g pertenecientes a $L^2_\alpha[a, b]$ como la integral de Stieltjes-Lebesgue

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x). \tag{2.1}$$

Para una función α prefijada de antemano, la ortogonalidad respecto a la distribución $d\alpha$ vendrá definida por la relación:

$$\langle f, g\rangle = 0,$$

y diremos que f y g son ortogonales, o que, f es ortogonal a g respecto a la distribución $d\alpha$. Además, al ser α es absolutamente continua, el producto escalar se puede rescribir como la integral de Lebesgue:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \tag{2.2}$$

donde ρ es una función medible no negativa tal que $0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty$. A la función ρ la llamaremos *función peso.*

Nótese que la propiedad de ortogonalidad puede escribirse en términos de *funcionales lineales.* Para ello definamos un funcional $\mathcal{L}$ de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L_\alpha(a, b) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{L}[f] &= \int_a^b f(x)d\alpha(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notese que $\mathcal{L}$ es lineal y que la propiedad de ortogonalidad anterior equivale a que $\mathcal{L}[f \cdot g] = 0$. Definiremos los momentos μ_n del funcional $\mathcal{L}$ mediante

$$\mathcal{L}[x^k] = \mu_k, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Por tanto, si conocemos todos los momentos del funcional, podemos conocer el resultado de aplicar dicho funcional a cualquier polinomio π.

Definicion 2.1 : *Dada una sucesión de polinomios $\{P_n\}$, diremos que $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$ si se cumple que*

1. *P_n es un polinomio de grado n,*
2. *$\mathcal{L}[P_nP_m] = 0, \quad m \neq n$, para todo $n, m = 0, 1, 2, \ldots,$*
3. *$\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots .$*

Nótese que la tercera condición es inmediata si $d\alpha(x) = \rho(x)dx$ es continua y no negativa. A una sucesión de polinomios que cumple las condiciones anteriores la denotaremos por SPO. Además dado que la sucesión es una base del espacio vectorial de los polinomios, es fácil ver que las condiciones 2 y 3 de la definición 2.1 son equivalentes a $\mathcal{L}[x^m P_n] = 0$ y $\mathcal{L}[x^n P_n] = K_n \neq 0$, y dado que son ortogonales, aplicando Gram-Schmidt, se tiene que dicha sucesión de polinomios es única salvo un factor multiplicativo, de hecho se tiene que si $P_n(x) = a_n x^n + \cdots$ y definimos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{-1} \equiv 1,$$

aplicando el funcional $\mathcal{L}$ a P_n, se deduce que $a_n = \dfrac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}$. Además, del proceso de ortogonalización se deduce que

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

que evidentemente forman una SPO mónicos (por definición de Δ_{n-1}) con coeficientes reales.

Nota 2.1 : *Es importante destacar que en el caso de que $\alpha(x)$ tenga un número finito de puntos de crecimiento, por ejemplo N, el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt descrito anteriormente nos conduce a una familia finita.*

Por último, nótese que hemos trabajado con productos escalares (2.1) donde $d\alpha(x) = \rho(x)dx$ es absolutamente continua, y la función peso $\rho(x) > 0$, por lo tanto, tendremos que

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle = \langle 1, fg \rangle.$$

En el caso de que la forma bilineal verifique estas relaciones la llamaremos de *Hankel*, y en el caso de que no sea de Hankel, no se puede asegurar que la familia de polinomios ortogonales respecto tal forma bilineal verifiquen la ecuación diferencial de la forma (1.3), un ejemplo de forma bilineal que no es de Hankel es $\langle f, g \rangle = f'(0)g'(0)$, basta tomar $f(x) = g(x) = x$.
Una de las principales características de las SPO es que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos (RRTT). Ello es una consecuencia inmediata de la ortogonalidad.[3]

Teorema 2.1 : *Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}$. Entonces la SPO $\{P_n\}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma:*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \tag{2.5}$$

[3]Debemos destacar que este resultado es válido siempre y cuando la forma bilineal asociada al producto escalar 2.1 que define la ortogonalidad de los polinomios sea de Hankel. Existen casos de formas bilineales definidas positivas pero no Hankel, cuyas familias de polinomios ortogonales no satisfacen RRTT: por ejemplo los polinomios tipo Sovolev, ver e.g. [19].

Generalmente se suele imponer que $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$, con lo que una SPO queda determinada de forma única conocidas las sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$.

El recíproco de (2.5) también se da, o sea, dada una sucesión de números $\beta_n \in \mathbb{R}$ y $\gamma_n > 0$ y una sucesión de polinomios mónicos que satisface (2.5) existe una distribución $d\alpha$ respecto a la cual dicha sucesión de polinomios conforman una SPOM. Este resultado, como ya mencionamos anteriormente, se conoce como Teorema de Favard. Enunciémoslo en el lenguaje de los funcionales lineales

Teorema 2.2 : *Sean $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones cualesquiera de números reales y sea $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios mónicos definidos mediante la relación*

$$P_n(x) = (x - \beta_{n-1})P_{n-1}(x) - \gamma_{n-1}P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$. Entonces existe un único funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathcal{L}[1] = \gamma_0, \qquad \mathcal{L}[P_n P_m] = 0 \quad si \quad m \neq n.$$

Además, $\mathcal{L}$ es definido positivo si y sólo si los $\gamma_n > 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Finalmente hablaremos sobre cómo se distrinuyen los ceros de los polinomios ortogonales.

Definicion 2.2 : *Sea (a, b) un intervalo real. Diremos que un funcional es definido positivo en (a, b) si $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para cualquier polinomio π no negativo y no identicamente nulo en (a, b). Al mayor conjunto (a, b) tal que $\mathcal{L}$ sea definido positivo en él se le denomina soporte de $\mathcal{L}$.*

Teorema 2.3 : *Sea (a, b) el soporte de $\mathcal{L}$ definido positivo y $\{P_n\}$ una SPO respecto a $\mathcal{L}$. Entonces:*

1. *Todos los ceros de P_n son reales, simples y están localizados en (a, b).*

2. *Dos polinomios consecutivos P_n y P_{n+1} no pueden tener ningún cero en común.*

3. *Denotemos por $x_{n,j}$ sa los ceros del polinomio P_n, (consideremos en adelante que $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$). Entonces:*

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1},$$

es decir, los ceros de P_n y P_{n+1} entrelazan unos con otros.

2.2. Polinomios Ortogonales Clásicos

En este subcapítulo vamos a definir los polinomios ortogonales clásicos definidos sobre el eje real. Es bien sabido que existen varias caracterizaciones de tales polinomios (ver apartado 1 de [1]), nosotros vamos a usar la caracterización de Bochner [8], es decir, vamos a definir tales polinomios como las soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{2.6}$$

donde σ y τ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente. La razón de utilizar esta caracterización es que este método lo podremos generalizar al caso de los polinomios en redes no uniformes.

La ecuación (2.6) se denomina *ecuación diferencial hipergeométrica* y las soluciones y de la misma satisfacen con la propiedad de que sus m-ésimas derivadas $y^{(m)} \equiv y_m$ satisfacen una ecuación de la forma:

$$\sigma(x)y''_m + \tau_m y'_m + \mu_m y_m = 0,$$

donde

$$\tau_m(x) = \tau(x) + m\sigma'(x), \quad \mu_m = \lambda + m\tau'(x) + \frac{m(m-1)}{2}\sigma''(x). \tag{2.7}$$

De hecho, se puede comprobar que cualquier solución de (2.7) es la derivada de una solución de (2.6) (ver Capítulo I, §2 de [24]).

Esta propiedad es muy importante ya que nos permite encontrar una fórmula explícita para los polinomios que satisfacen la ecuación (2.6). Para ello escribamos (2.6) y (2.7) en su forma *autoconjugada* o *simétrica*:

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad [\sigma(x)\rho_m(x)y'_m]' + \mu_m\rho_m(x)y_m = 0, \tag{2.8}$$

donde ρ y ρ_m son funciones de simetrización que cumplen las ecuaciones diferenciales (de Pearson):

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad [\sigma(x)\rho_m(x)]' = \tau_m(x)\rho_m(x).$$

Si ρ es conocida entonces, usando las ecuaciones anteriores, obtenemos para ρ_m la expresión:

$$\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x). \tag{2.9}$$

Para encontrar una expresión explícita de las soluciones de la ecuación (2.6), escribamos la ecuación autoconjugada para las derivadas de la forma

$$\rho_m(x)y_m = -\frac{1}{\mu_m}[\rho_{m+1}(x)y_{m+1}]',$$

luego

$$\rho_m(x)y_m = \frac{A_m}{A_n}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\rho_n(x)y_n], \qquad A_m = (-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\mu_k, \quad A_0 = 1.$$

Como buscamos soluciones polinómicas, $y \equiv P_n$, tenemos que $P_n^{(n)}$ es una constante; por lo tanto, para las derivadas de orden m, $P_n^{(m)}$, obtenemos la expresión

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{A_{nm}B_n}{\rho_m(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\rho_n(x), \tag{2.10}$$

donde $A_{nm} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ y $B_n = \dfrac{P_n^{(n)}}{A_{nm}}$. Además, al ser $P_n^{(n)}$ una constante, de (2.7) tenemos que $\mu_n = 0$. Luego,

$$\lambda \equiv \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \tag{2.11}$$

Esta fórmula nos determina los autovalores λ_n de (2.6) y es conocida como condición de *hipergeometricidad*. La fórmula anterior se obtiene también sustituyendo en (2.6) el polinomio de grado n e igualando los coeficientes de x^n. Usando (2.11) encontramos el valor de la constante A_{nm} que nos será de gran utilidad más adelante. Usando

$$A_{nm} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{nk},$$

y sustituyendo en ella los valores $\mu_{nm} = \mu_m(\lambda_n) = -(n-m)[\tau' + \frac{1}{2}(n+m+1)\sigma'']$, obtenemos la expresión:

$$A_{nm} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right]. \tag{2.12}$$

Cuando $m = 0$ la fórmula (2.10) se convierte en la conocida fórmula de Rodrigues para los polinomios clásicos (ver caracterización de las SPOC):

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \qquad n = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{2.13}$$

Nótese que hasta el momento sólo nos han interesado las soluciones polinómicas de la ecuación (2.6). Si además queremos que tales soluciones sean ortogonales tenemos que exigir algunas condiciones complementarias. Veamos cómo a partir de las ecuaciones diferenciales simetrizadas (2.8) podemos demostrar la ortogonalidad de las soluciones polinómicas respecto a la función peso ρ.

Teorema 2.4 : *Supongamos que $x^k\sigma(x)\rho(x)|_{x=a,b} = 0$, para todo $k \geq 0$. Entonces las soluciones polinómicas P_n de la ecuación (2.6) constituyen una SPO respecto a la función peso ρ definida por la ecuación $[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)$, es decir, se cumple que:*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \delta_{nm}d_n^2, \tag{2.14}$$

donde δ_{nm} es el símbolo de Kronecker y d_n denota la norma de los polinomios P_n.

Prueba: Sean P_n y P_m dos de las soluciones polinómicas de (2.6). Sabemos que

$$[\sigma(x)\rho(x)P_n'(x)]' + \lambda_n\rho(x)P_n(x) = 0,$$

$$[\sigma(x)\rho(x)P_m'(x)]' + \lambda_m\rho(x)P_m(x) = 0.$$

Multiplicando la primera por P_m y la segunda por P_n, restando ambas e integrando en $[a, b]$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&(\lambda_n - \lambda_m)\textstyle\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = \\
&= \int_a^b \big([\sigma(x)\rho(x)P_m'(x)]P_n(x) - [\sigma(x)\rho(x)P_n'(x)]P_m(x)\big)\,dx = \\
&= \sigma(x)\rho(x)\left|\begin{array}{cc} P_n(x) & P_m(x) \\ P_n'(x) & P_m'(x) \end{array}\right|_{x=a,b} = \sigma(x)\rho(x)W[P_n(x), P_m(x)]\Big|_{x=a,b}.
\end{aligned}$$

Pero el Wronskiano $W(P_n, P_m)$ es un polinomio en x; por tanto, si exigimos la condición de que $x^k\sigma(x)\rho(x)$ se anule en $x = a$ y $x = b$ (para todo $k \geq 0$) obtendremos $(\lambda_n \neq \lambda_m)$ que los polinomios P_n y P_m son ortogonales respecto a la función peso ρ. Aquí debemos destacar que a y b se suelen escoger de tal forma que ρ sea positiva en $[a, b]$. Una elección puede ser tomar a y b como las raíces de $\sigma(x) = 0$, si éstas existen [24].

□

Análogamente, usando la ecuación (2.8) para las derivadas $y_k \equiv P_n^{(k)}$, se puede ver que las k-ésimas derivadas de los polinomios hipergeométricos también son ortogonales, i.e. que

$$\int_a^b P_n^{(k)} P_m^{(k)}(x)\rho_k(x)dx = \delta_{nm} d_{kn}^2. \tag{2.15}$$

Una consecuencia de la propiedad de la ortogonalidad es que los polinomios satisfacen una relación de recurrencia a tres términos.
Finalmente, para calcular la norma d_n de los polinomios podemos utilizar la fórmula de Rodrigues que, sustituyéndola en (2.14) e integrando por partes, nos da

$$d_n^2 = B_n(-1)^n n! a_n \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx. \tag{2.16}$$

siendo a_n el coeficiente principal de P_n.

2.2.1. Algunas consecuencias de la fórmula de Rodrigues

Pasemos ahora a estudiar algunas de las consecuencias de la fórmula de Rodrigues.

1. Si calculamos el polinomio de grado 1 usando la fórmula de Rodrigues (2.10) obtenemos:

$$P_1(x) = \frac{B_1}{\rho(x)}[\sigma(x)\rho(x)]' = B_1\tau(x),$$

y por tanto τ es un polinomio de grado exactamente uno.

2. Tomemos ahora $m = 1$ en (2.10). Realizando unos cálculos directos obtenemos

$$P_n'(x) = \frac{A_{n1}B_n}{\rho_1(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\rho_n(x) = -\frac{\lambda_n}{\rho_1(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\rho_{1_{n-1}}(x).$$

Luego,

$$P_n'(x) = -\frac{\lambda_n B_n}{\overline{B}_{n-1}} \overline{P}_{n-1}(x), \tag{2.17}$$

donde $\overline{P}_{n-1}$ denota al polinomio ortogonal respecto a la función peso $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.

3. Escribiendo la ecuación (2.10) para el polinomio de grado $n+1$, usando que $[\sigma(x)\rho_n(x)]' = \tau_n(x)\rho_n(x)$ y utilizando que

$$P_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)B_n}{\sigma(x)\rho(x)} \frac{d^{n-1}\rho_n(x)}{dx^{n-1}}$$

obtenemos una fórmula difero-recurrente a tres términos[4]

$$\sigma(x)P_n'(x) = \frac{\lambda_n}{n\tau_n'}\left[\tau_n(x)P_n(x) - \frac{B_n}{B_{n+1}}P_{n+1}(x)\right]. \tag{2.18}$$

[4]Esta expresión, también caracteriza a los polinomios clásicos y se conoce como caracterización de Al-Salam y Chinara

2.2.2. Representación Integral

Supongamos que $\rho_n(x) = \sigma^n(x)\rho(x)$ es una función analítica en el interior y la frontera de un recinto limitado por cierta curva cerrada C del plano complejo que rodea al punto $z = x$. Entonces, usando la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho_n(z)}{z - x} dz, \tag{2.19}$$

de donde se deduce la representación integral

$$P_n(x) = \frac{B_n}{2\pi i \rho(x)} \frac{d^n}{dz^n} \int_C \frac{\rho_n(z)}{z - x} dz = \frac{n! B_n}{2\pi i \rho(x)} \int_C \frac{\rho_n(z)}{(z - x)^{n+1}} dz.$$

Utilizando la representación anterior, Nikiforov y Uvarov desarrollaron un método unificado para tratar los polinomios clásicos y diversas funciones especiales. Más detalles se pueden encontrar en [24].

2.2.3. Los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi

Comenzaremos escribiendo los principales parámetros de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos clásicos (SPOMC). Para más detalles ver [24]. Los polinomios ortogonales en la recta real, que son solución de una ecuación del tipo (2.6), se pueden clasificar en tres grandes familias en función del polinomio σ (τ siempre es de grado 1) [24], [8]. Cuando σ es un polinomio de grado cero, los polinomios correspondientes se denominan *Polinomios de Hermite* $H_n(x)$, cuando σ es de grado 1, *Polinomios de Laguerre* $L_n^\alpha(x)$ y cuando σ es de grado 2 con ceros reales y distintos, *Polinomios de Jacobi* $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, respectivamente. En las tablas 1 y 2 están representados los principales parámetros de dichas familias, en las cuales $(a)_n$ representa al símbolo de Pochhammer[5]. Para los polinomios σ se han escogido las llamadas *formas canónicas*.

Cuadro 1: Clasificación de las SPO clásicas.

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^\alpha(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
$\sigma(x)$	1	x	$1 - x^2$
$\tau(x)$	$-2x$	$-x + \alpha + 1$	$-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$
λ_n	$2n$	n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$
$\rho(x)$	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$ $\alpha > -1$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ $\alpha, \beta > -1$
$\rho_n(x)$	e^{-x^2}	$x^{n+\alpha} e^{-x}$	$(1 - x)^{n+\alpha} (1 + x)^{n+\beta}$

2.2.4. Representación Hipergeométrica

De la fórmula de Rodrigues (2.10) se puede obtener la representación de los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi en términos de una función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ y ${}_1F_1$

[5] $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a + 1)(a + 2) \cdots (a + k - 1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Cuadro 2: Parámetros de las SPO Mónicas ($a_n = 1$).

$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$
B_n	$\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$(-1)^n$	$\dfrac{(-1)^n}{(n+\alpha+\beta+1)_n}$
b_n	0	$-n(n+\alpha)$	$\dfrac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}$
d_n^2	$\dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^n}$	$\Gamma(n+\alpha+1)n!$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+2n+1}n!\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)_n^2}$

[24] definida, en el caso más general, de la forma

$$
{}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{array}\middle|\, x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}.
$$

De esta manera encontramos que

$$
H_n(x) = \begin{cases} (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -m \\ \frac{1}{2} \end{array}\middle|\, x^2\right), & n = 2m \\ (-1)^m \left(\frac{3}{2}\right)_m x \, {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -m \\ \frac{3}{2} \end{array}\middle|\, x^2\right), & n = 2m+1 \end{cases}
$$

$$
L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \, {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \alpha+1 \end{array}\middle|\, x\right),
$$

$$
P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{2^n (\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+a)_n} \, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{array}\middle|\, \frac{1-x}{2}\right).
$$

Casos particulares

1. Los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n(x)$:

$$
T_n(x) = P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2^n} \cos[\, n \arccos(x)\,].
$$

2. Los polinomios de Chebyshev de segunda especie $U_n(x)$:

$$
U_n(x) = P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\operatorname{sen}[(n+1) \arccos(x)]}{\operatorname{sen}[\, \arccos(x)\,]}.
$$

3. Los polinomios de Legendre $E_n(x)$:

$$
E_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^k x^k.
$$

Nota 2.2 : *Nótese que los polinomios de Legendre son ortogonales en un intervalo compacto de la recta real respecto a la medida de Lebesgue. Este hecho será de utilidad más adelante.*

2.3. Los polinomios hipergeométricos en redes no uniformes: los q-polinomios

En este subapartado vamos a estudiar las principales características de los q-polinomios. Estas funciones especiales (o q-funciones como suelen denominarse) tienen un sinfin de aplicaciones en combinatoria, teoría de números, álgebra computacional, etc.
Es necesario destacar que existen varias técnicas para tratar los q-polinomios. Una de ellas, y quizás la más tradicional, es considerarlos como *q-series hipergeométricas básicas* [16] y deducir propiedades a partir de éstas. Este punto de vista es menos general ya que es necesario considerar por separado cada una de las familias a estudiar [16]. Otra forma consiste en considerarlos como polinomios de variable *discreta*, i.e. como soluciones de la ecuación hipergeométrica

$$\widetilde{\sigma}(x)y'' + \widetilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0,$$

discretizada en la red *no uniforme* $x(s) = c_1(q)[q^s + q^{-s-\mu}] + c_3(q)$. Este segundo punto de vista es más general y contiene al anterior ya que una propiedad de las soluciones de la ecuación discreta (2.21) es que se expresan como series hipergeométricas básicas.

2.3.1. La ecuación hipergeométrica en una red no uniforme

Comenzaremos obteniendo una discretización de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$\widetilde{\sigma}(x)y'' + \widetilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0. \tag{2.20}$$

Para ello vamos a aproximar las derivadas y' e y'' de la siguiente forma:

$$y'(x) \sim \frac{1}{2}\left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)}\right],$$
$$y''(x) \sim \frac{1}{x\big(s+\frac{h}{2}\big) - x\big(s-\frac{h}{2}\big)}\left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)}\right].$$

La razón de escribir el factor $x\big(s+\frac{h}{2}\big) - x\big(s-\frac{h}{2}\big)$ es debido a que la diferencia generalizada

$$\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)}$$

aproxima mejor a la primera derivada en $x\left(s-\frac{h}{2}\right)$, que en $x(s)$ (ver pág. 55 de [22]). Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.20), y haciendo el cambio lineal de la variable $s \to hs$ obtenemos la ecuación

$$\tilde{\sigma}(x(s))\frac{\Delta}{\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2}\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda y(s) = 0, \tag{2.21}$$

donde $\nabla f(s) = f(s) - f(s-1)$, $\Delta f(s) = f(s+1) - f(s)$, $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1, y λ es una constante. Se puede comprobar que (2.21) aproxima a (2.20) en la *red no uniforme* $x(s)$ hasta orden $O(h^2)$.
En adelante llamaremos *red* a una función $x(s) \in \mathcal{C}^2(U)$, donde U es un dominio del plano complejo, tal que $x(s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ define un conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ en los cuales vamos a discretizar la ecuación (2.20).
Consideremos ahora, en lugar de la ecuación (2.21), la siguiente ecuación equivalente

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \tag{2.22}$$

donde $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x(s))\Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right)$, $\tau(s) = \tilde{\tau}(x(s))$, y donde por $y(s)$ denotaremos las soluciones de la ecuación anterior, es decir, $y(s) \equiv y(x(s))$. Nótese que τ es también un polinomio de grado a lo sumo 1 en $x(s)$, no así σ, que en general, no es un polinomio en $x(s)$[6].

Ejemplo 2.1 : *Tomemos $q \neq 1$, sean $x(s) = q^s + q^{-s}$, $\tilde{\sigma}(s) = ax(s)$ y $\tilde{\tau}(s) = \tau(s) = bx(s) + c$ con $b \neq 0$, entonces sustituyendo dichas expresiones de $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ en la ecuación anterior se obtiene*

$$\sigma(s) = q^{2s}(\overline{b}q - \overline{b}) + q^s(\overline{a} + \overline{c}q - \overline{c}) + (\overline{b}q^2 - \overline{b}q^3 + \overline{b}q - \overline{b}) + q^{-s}(\overline{a} + \overline{c}q^2) + q^{-2s}(\overline{b}q^2 - \overline{b}q^3)$$

donde $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ son transformaciones de las constantes a, b y c respectivamente.
Nótese que para que $\sigma(s)$ sea un polinomio en $x(s)$ tendrían que ser iguales los coeficientes de q^{2s} y de q^{-2s}, pero ésto no es posible, ya que $\overline{b} \neq 0$.

A la ecuación (2.22) se le denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y las soluciones de la misma cumplen la propiedad, comúnmente denominada *propiedad de hipergeometricidad*, de que sus *k-ésimas diferencias generalizadas* y_k, definidas por

$$y_k(s) = \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)} \frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)} \cdots \frac{\Delta}{\Delta x(s)}\, y \equiv \Delta^{(k)} y(s), \tag{2.23}$$

donde $x_m(s) = x\left(s + \frac{m}{2}\right)$, satisfacen una ecuación del mismo tipo [22], [24]. Es evidente que

$$y_k(s) = \frac{\Delta y_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \qquad y_0(s) \equiv y(s).$$

Ello nos conduce a la ecuación

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_k\left(s - \frac{1}{2}\right)} \frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)} + \tau_k(s)\frac{\Delta y_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \mu_k y_k(s) = 0, \tag{2.24}$$

donde

$$\tau_k(s) = \frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)} + \tau_{k-1}(s+1)\frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad \tau_0(s) = \tau(s),$$

y

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \frac{\Delta \tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \qquad \mu_0 = \lambda.$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\mu_k = \lambda + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Delta\tau_m(s)}{\Delta x_m(s)}, \qquad \tau_k(s) = \frac{\sigma(s+k) - \sigma(s) + \tau(s+k)\Delta x\left(s + k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x_{k-1}(s)}. \tag{2.25}$$

Y al igual que ocurría en el caso continuo, se tiene que si queremos obtener polinomios de grado n, entonces $\mu_n = 0$, de ahí que

$$\lambda \equiv \lambda_n = -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Delta\tau_m(s)}{\Delta x_m(s)} = -[n]_q \left\{ \left(\frac{q^{\frac{1}{2}(n-1)} + q^{-\frac{1}{2}(n-1)}}{2} \right) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}. \tag{2.26}$$

donde hemos usado de [5] la igualdad

$$\frac{\Delta\tau_k(s)}{\Delta x_k(s)} = \tilde{\tau}' \frac{q^k + q^{-k}}{2} + \frac{\tilde{\sigma}''}{2}[2k]_q,$$

[6] En nuestro trabajo utilizaremos $q-$polinomios en la red $x(s) = q^s$. En este caso, debido a la "linealidad" de la red, es fácil comprobar que σ si es un polinomio en $x(s)$.

y donde $[n]_q$ denota los q-números[7]. Por otra parte, es importante destacar que no para cualquier red la ecuación (2.21) Y (2.22) tienen soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico en dicha red, es más, el siguiente resultado (condición suficiente) junto con el publicado en [5] nos dan una caracterización del tipo de red que debemos escoger.

Teorema 2.5 : *El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales (2.22) tiene como solución una familia de polinomios de tipo hipergeométrico viene dado por*

$$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q), \quad q \in \mathbb{C}, \tag{2.27}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q, pero son independientes de s.

Nota 2.3 : *Nótese que para la red $x(s) = s$, se obtienen los polinomios clásicos discretos de Hahn, Meixner, Charlier y Kravchuk (ver [22] y [24]).*

2.3.2. Fórmula tipo Rodrigues

La propiedad de hipergeometricidad es muy importante ya que nos permite encontrar, de manera explícita, una fórmula para el cálculo de los polinomios que satisfacen la ecuación en diferencias (2.22). Para ello, escribamos previamente (2.22) y (2.24) en su forma *simétrica* o *autoconjugada*:

$$\frac{\Delta}{\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)}\left[\sigma(s)\rho(s)\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda\rho(s)y(s) = 0, \tag{2.28}$$

y

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k\left(s-\frac{1}{2}\right)}\left[\sigma(s)\rho_k(s)\frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right] + \mu_k\rho_k(s)y_k(s) = 0, \tag{2.29}$$

donde ρ y ρ_k son soluciones de las ecuaciones en diferencias de tipo Pearson

$$\frac{\Delta}{\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)}\left[\sigma(s)\rho(s)\right] = \tau(s)\rho(s), \qquad \frac{\Delta}{\Delta x_k\left(s-\frac{1}{2}\right)}\left[\sigma(s)\rho_k(s)\right] = \tau_k(s)\rho_k(s), \tag{2.30}$$

respectivamente. Conocida la función de *simetrización* ρ, podemos calcular la función ρ_k usando (2.24) y (2.30) [22], de hecho se prueba que la función

$$\frac{\rho_k(s)}{\sigma(s+1)\rho_{k-1}(s+1)}$$

es una función periódica de período 1, que nos lleva a la relación $\rho_k(s) = \sigma(s+1)\rho_{k-1}(s+1)$, de donde, por inducción, se sigue

$$\rho_k(s) = \rho(s+k)\prod_{m=1}^{k}\sigma(s+m).$$

En adelante denotaremos por $P_n(s)_q$ a las soluciones polinómicas de grado n en $x(s)$ de la ecuación en diferencias (2.22).

---

[7] $[x]_q \equiv \dfrac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{C}$

Finalmente, haciendo un desarrollo análogo al realizado en el caso continuo, llegamos a la fórmula de Rodrigues para los polinomios de variable discreta en redes no uniformes [22] soluciones de la ecuación (2.22)

$$P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)}[\rho_n(s)], \qquad \nabla^{(n)} \equiv \nabla_0^{(n)} = \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)}. \tag{2.31}$$

Que puede reescribirse como

$$P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \left[\frac{\delta}{\delta x(s)}\right]^n [\rho_n(s - \tfrac{n}{2})], \qquad \left[\frac{\delta}{\delta x(s)}\right]^n \equiv \overbrace{\frac{\delta}{\delta x(s)} \frac{\delta}{\delta x(s)} \cdots \frac{\delta}{\delta x(s)}}^{n \text{ veces}}, \tag{2.32}$$

donde $\delta f(s) = \nabla f\left(s + \frac{1}{2}\right) \equiv f\left(s + \frac{1}{2}\right) - f\left(s - \frac{1}{2}\right)$.
Además, de forma análoga al caso discreto, de la fórmula de Rodrigues (2.31) se pueden obtener muchas propiedades análogas a las de los polinomios clásicos (Jacobi, Laguerre, Hermite)[24]. Una de ellas es que τ tiene que ser un polinomio de grado exactamente uno en $x(s)$, ya que si calculamos el polinomio de grado 1 usando la fórmula de Rodrigues (2.31) y (2.30), encontramos

$$P_1(s)_q = \frac{B_1}{\rho(s)} \frac{\nabla \rho_1(s)}{\nabla x_1(s)} = \frac{B_1}{\rho(s)} \frac{\Delta}{\Delta x(s)} [\sigma(s)\rho(s)] = B_1 \tau(s),$$

luego es directo.

2.3.3. La propiedad de la ortogonalidad

Hasta ahora sólo nos han interesado encontrar soluciones polinómicas de la ecuación en dife-
rencias (2.22). Si, además, queremos que dichas soluciones sean ortogonales tenemos que exigir algunas condiciones adicionales. De manera análoga al caso continuo, a partir de las ecuaciones (2.28) y (2.29) podemos demostrar la ortogonalidad de las soluciones polinómicas respecto a la función peso ρ.

Teorema 2.6 : *(Nikiforov, Uvarov [22]) Supongamos que existen dos valores a y b tales que*

$$x^k\left(s - \tfrac{1}{2}\right) \sigma(s)\rho(s) \Bigg|_{s = a, b} = 0, \tag{2.33}$$

para todo $k \geq 0$. Entonces las soluciones polinómicas P_n de la ecuación (2.24) son ortogonales dos a dos respecto a la función peso ρ definida por la ecuación

$$\frac{\Delta}{\Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right)} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s),$$

es decir, se cumple que

$$\sum_{s_i = a}^{b-1} P_n(s_i)_q P_m(s_i)_q \rho(s_i) \Delta x\left(s_i - \tfrac{1}{2}\right) = \delta_{nm} d_n^2, \qquad s_{i+1} = s_i + 1, \tag{2.34}$$

donde, como ántes, δ_{nm} es el símbolo de Kronecker y d_n denota la norma de los polinomios $P_n(s)_q$.

2.3.4. Representación integral

Supongamos que ρ_n es una función analítica en el interior y la frontera del recinto limitado por la curva cerrada C del plano complejo qur contiene a los puntos $z = s, s-1, \dots, s-n$, y sea $x_m(z) = x\left(z + \frac{m}{2}\right)$ la función definida en (2.27). Para tales funciones $x_m(z)$ se cumple que

$$x(s) - x(s-t) = [t]_q \nabla x\big(s - \tfrac{t-1}{2}\big). \tag{2.35}$$

Entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$\rho_n(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\rho_n(z)x_n'(z)}{x_n(z) - x_n(s)}dz. \tag{2.36}$$

Se puede probar que, dadas las funciones σ y τ_n, existe dicha curva C [5]. Por tanto, es válida la siguiente representación para los polinomios P_n:

$$P_n(s)_q = \frac{[n]_q! B_n}{\rho(s)2\pi i}\int_C \frac{\rho_n(z)x_n'(z)}{[x_n(z) - x_n(s)]^{(n+1)}}dz. \tag{2.37}$$

donde $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [2]_q[1]_q, \quad n \in \mathbb{N}$.

Nota 2.4 : *Nótese que si* $q \to 1$, $[n]_q \to n$ *y* $[n]_q! \to n!$.

A partir de (2.37) podemos encontrar una fórmula explícita para calcular los P_n de cualquier grado, usando análisis complejo, obteniéndose

$$P_n(s)_q = B_n \sum_{m=0}^{n} \frac{[n]_q!(-1)^{m+n}}{[m]_q![n-m]_q!} \frac{\nabla x\left(s + m - \frac{n-1}{2}\right)}{\prod_{l=0}^{n} \nabla x\left(s + \frac{m-l+1}{2}\right)} \frac{\rho_n(s-n+m)}{\rho(s)}. \tag{2.38}$$

Utilizando la expresión anterior y la ecuación de Pearson (2.30) escrita de la forma

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s)\Delta x\left(s + m - \frac{n-1}{2}\right)}{\sigma(s+1)},$$

obtenemos [23]

$$\begin{aligned} P_n(s)_q = B_n \sum_{m=0}^{n} \frac{[n]_q!(-1)^{m+n}}{[m]_q![n-m]_q!} \frac{\nabla x\left(s + m - \frac{n-1}{2}\right)}{\prod_{l=0}^{n} \nabla x\left(s + \frac{m-l+1}{2}\right)} \times \\ \times \prod_{l=0}^{n-m-1} [\sigma(s-l)] \prod_{l=0}^{m-1} [\sigma(s+l) + \tau(s+l)\Delta x\big(s + l - \tfrac{1}{2}\big)]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde se ha adoptado el convenio $\prod_{l=0}^{-1} f(l) \equiv 1$.

2.3.5. La representación como q-series hipergeométricas

La expresión (2.39) nos permite encontrar la representación de los polinomios P_n en términos de las *q-series hipergeométricas*. Para ello escribimos la fórmula que define la función $x(s)$ de la siguiente forma

$$x(s) = c_1(q)[q^s + q^{-s-\mu}] + c_3(q), \text{ donde } q^{\mu} = \frac{c_1(q)}{c_2(q)}. \tag{2.40}$$

Utilizando la propiedad de simetría:

$$x(s) = x(-s-\mu), \qquad \Delta x\big(s-\tfrac{1}{2}\big) = -\Delta x\big(t-\tfrac{1}{2}\big)\Big|_{t=-s-\mu}, \tag{2.41}$$

obtenemos de (2.22) que

$$\tilde{\sigma}(x(s)) = \frac{1}{2}[\sigma(-s-\mu)+\sigma(s)], \quad \tilde{\tau}(x(s)) = \frac{\sigma(-s-\mu)-\sigma(s)}{\Delta x\big(s-\frac{1}{2}\big)}. \tag{2.42}$$

Como hemos visto anteriormente τ es un polinomio de grado 1 en $x(s)$, luego

$$\tau(s)\Delta x\big(s-\tfrac{1}{2}\big) = q^{-2s}\sum_{k=0}^{4} b_k q^s.$$

Análogamente, para la función σ tendremos $\sigma(s) = q^{-2s}p_4(q^s)$, donde p_4 es un polinomio arbitrario de grado, a lo sumo, 4. Además, para tal selección de σ y τ, los polinomios $\tilde{\sigma}(x(s))$ y $\tilde{\tau}(x(s))$ son de grado, a lo sumo 2, y exactamente 1, respectivamente. Nótese que el coeficiente lider y el término independiente de p_4 no pueden ser simultáneamente ceros pues (2.42) implicaría que $\tau(s) = const$, lo cual es una contradicción.
Consideremos el caso más general, cuando p_4 es un polinomio con 4 raices diferentes, que denotaremos por s_i, $i = 1, 2, 3, 4$, es decir,

$$p_4(s) = \tilde{C}\prod_{i=1}^{4}(q^s - q^{s_i}),$$

donde $\tilde{C}$ es una constante. Como el coeficiente lider y el termino independiente no pueden ser ceros simultáneamente, los demás casos se obtienen tomando límites cuando $q^{s_i} \to 0$ o $q^{s_i} \to \infty$.
Como $q^s - q^{s_i} = \kappa_q q^{\frac{1}{2}(s+s_i)}[s-s_i]_q$,[8]

$$\sigma(s) = A[s-s_1]_q[s-s_2]_q[s-s_3]_q[s-s_4]_q, \qquad A = const \neq 0. \tag{2.43}$$

Por último usando el *q-análogo de Pochhammer*:

$$(a|q)_k = \prod_{m=0}^{k-1}[a+m]_q, \tag{2.44}$$

y todo lo anterior, sustituyendo la función σ en (2.39) y realizando unos cálculos tediosos pero elementales obtenemos (los detalles se pueden encontrar en [23])

$$\begin{aligned} P_n(s)_q &= B_n\left(\frac{A}{c_1(q)q^{\frac{-\mu}{2}}\kappa_q^2}\right)^n (s_1+s_2+\mu|q)_n(s_1+s_3+\mu|q)_n \times \\ &\times (s_1+s_4+\mu|q)_n\, {}_4F_3\left(\begin{array}{c} -n, 2\mu+n-1+\sum_{i=1}^{4}s_i, s_1-s, s_1+s+\mu \\ s_1+s_2+\mu, s_1+s_3+\mu, s_1+s_4+\mu \end{array}; q, 1\right), \end{aligned} \tag{2.45}$$

[8]En adelante, denotaremos por κ_q a la cantidad $q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$.

o, en términos de las series hipergeométricas básicas [23],

$$\begin{aligned} P_n(s)_q = B_n \left(\frac{-A}{c_1(q)q^{\mu}\kappa_q^5}\right)^n q^{-\frac{n}{2}(3s_1+s_2+s_3+s_4+\frac{3(n-1)}{2})}(q^{s_1+s_2+\mu})_n \times \\ \times (q^{s_1+s_3+\mu};q)_n (q^{s_1+s_4+\mu})_n\, {}_4\varphi_3 \left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s-1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{array} ; q, q \right). \end{aligned} \tag{2.46}$$

En las expresiones anteriores ${}_rF_p$ es *q-función hipergeométrica* definida mediante la expresión

$${}_rF_p \left(\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots b_p \end{array} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1|q)_k (a_2|q)_k \cdots (a_r|q)_k}{(b_1|q)_k (b_2|q)_k \cdots (b_p|q)_k} \frac{z^k}{(1|q)_k} \left[\kappa_q^{-k} q^{\frac{1}{4}k(k-1)}\right]^{p-r+1}, \tag{2.47}$$

donde $(a|q)_k$ son los q-análogos del símbolo de Pochhammer (2.44), y ${}_r\varphi_p$ son las *series hipergeométricas básicas*, definidas por

$${}_r\varphi_p \left(\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots b_p \end{array} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k (a_2;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k (b_2;q)_k \cdots (b_p;q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)}\right]^{p-r+1}, \tag{2.48}$$

donde

$$(a;q)_k = \prod_{m=0}^{k-1} (1 - aq^m). \tag{2.49}$$

2.4. Los q-polinomios en la red exponencial $x(s) = q^s$

Consideremos ahora el límite $\mu \to \infty$, es decir, $q^{-\infty} \to 0$. Éste corresponde a la red exponencial $x(s) = c_1 q^s + c_3$. Ante todo, notemos que σ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en q^s; por lo tanto, σ y $\sigma(s) + \tau(s)\Delta x\big(s - \frac{1}{2}\big)$ son polinomios de grado, a lo sumo 2 en q^s. Como $\Delta x\big(s - \frac{1}{2}\big) = c_1 \kappa_q q^s$, los términos independientes de σ y $\sigma(s) + \tau(s)\Delta x\big(s - \frac{1}{2}\big)$ coinciden. Por tanto, pueden ser escritos de la forma

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \overline{A}(q^{s-s_1} - 1)(q^{s-s_2} - 1), \\ \sigma(s) + \tau(s)\Delta x\big(s - \tfrac{1}{2}\big) &= \overline{A}(q^{s-\overline{s}_1} - 1)(q^{s-\overline{s}_2} - 1). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Este caso puede obtenerse a partir del caso general:

$$\sigma(s) = A \prod_{i=1}^{4} [s - s_i]_q, \qquad \sigma(s) + \tau(s)\Delta x\big(s - \tfrac{1}{2}\big) = \sigma(-s-\mu) = A \prod_{i=1}^{4} [s + s_i + \mu]_q,$$

escogiendo los parámetros $s_i = s_i(\mu)$, $i = 1, 2, 3, 4$, y $A = A(\mu)$ de la forma

$$s_1(\mu) = s_1, \quad s_2(\mu) = s_2, \quad s_3(\mu) = -\overline{s}_1 - \mu, \quad s_4(\mu) = -\overline{s}_2 - \mu,$$

$$A(\mu) = \kappa_q^4 q^{-\mu - \frac{1}{2}(s_1+s_2+\overline{s}_1+\overline{s}_2)}\overline{A},$$

y tomando el límite $q^{-\mu} \to 0$, la expresión (2.45) se transforma en[9],

$$P_n(s)_q = C_n\, {}_3\varphi_2 \left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{s_1+s_2-\overline{s}_1-\overline{s}_2+n-1}, q^{s-\overline{s}_1} \\ q^{s_1-\overline{s}_1}, q^{s_2-\overline{s}_2} \end{array} ; q, q \right) \tag{2.51}$$

[9]Los cálculos intermedios se pueden encontrar en [23]

donde C_n es una constante.
Pasemos a calcular los q-polinomios pequeños de Jacobi para posteriormente obtener a partir de ellos los q-polinomios pequeños de Legendre, los cuales utilizaremos en la sección siguiente. Tomando los límites $q^{-s_2} \to +\infty$, $q^{-\overline{s_1}} \to +\infty$, $q^{s_2-\overline{s_1}} = q^{\delta}$ se llega a que

$$\frac{(q^{s-\overline{s}_1};q)_k}{(q^{s_1-\overline{s}_1};q)_k} = \prod_{m=0}^{k-1}\left(\frac{1-q^{s-\overline{s}_1+m}}{1-q^{s_2-\overline{s}_1+m}}\right) \to q^{k(s-s_1)},$$

por lo tanto,

$${}_3\varphi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{s_1+s_2-\overline{s}_1-\overline{s}_2+n-1}, q^{s-\overline{s}_1} \\ q^{s_1-\overline{s}_1}, q^{s_2-\overline{s}_2} \end{array} ; q, q\right) \to {}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{s_1-\overline{s}_2+n+\delta-1} \\ q^{\delta} \end{array} ; q, q^{s-s_1+1}\right),$$

$$\sigma(s) \to A_1 q^s(q^{s-s_1}-1),$$
$$\sigma(s)+\tau(s)\Delta x\big(s-\tfrac{1}{2}\big) \to A_1 q^{s+\delta}(q^{s-\overline{s}_2}-1).$$

Donde $\overline{A} = A_1 q^{s_2}$. Si ahora, tomamos $s_1 = 0$, $q^{\delta} = aq$, $q^{-\overline{s}_2} = bq$ y $A_1 = q^{-1}$ obtenemos los q-polinomios de Jacobi

$$P_n(s)_q = C_n\, {}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{array} ; q, q^{s+1}\right) \tag{2.52}$$

con

$$\sigma(s) = q^{s-1}(q^s-1), \quad \sigma(s)+\tau(s)\Delta x\big(s-\tfrac{1}{2}\big) = q^s(bq^{s+1}-1).$$

Por último, como ya dijimos tomando en los q-polinomios pequeños de Jacobi $a = b = 1$, tenemos los q-Polinomios pequeños de Legendre, cuya expresión y algunas de sus propiedades más relevantes, las veremos en

2.5. Los q-Polinomios Pequeños de Legendre

Los q-polinomios pequeños de Legendre se definen como

$$\begin{aligned} P_n(x|q) &= {}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{n+1} \\ q \end{array} ; q, qx\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k (q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k}\frac{q^k x^k}{(q;q)_k}, \qquad 0<q<1, \end{aligned} \tag{2.53}$$

y son ortogonales en la red exponencial $\{q^k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k P_m(q^k|q) P_n(q^k|q) = \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\delta_{n,m}. \tag{2.54}$$

Si usamos los coeficientes q-binomiales

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \tag{2.55}$$

y las fórmulas

$$(q^{-n};q)_k = (-1)^k q^{-nk+k(k-1)/2}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}, \quad (q^{n+1};q)_k = \frac{(q;q)_{n+k}}{(q;q)_n}, \tag{2.56}$$

entonces (2.53) se reduce a

$$P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{-nk+k(k+1)/2}(-x)^k, \tag{2.57}$$

y como

$$\lim_{q\uparrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix},$$

vemos que efectivamente se obtienen los polinomios de Legendre en $[0,1]$ haciendo tender q a uno

$$\lim_{q\uparrow 1} P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-x)^k = P_n(x).$$

Tomando $p = 1/q$, se tiene que $p > 1$ si $0 < q < 1$, luego

$$(q;q)_k = (-1)^k p^{-k(k+1)/2}(p;p)_k, \quad \begin{bmatrix} n \end{bmatrix}_q = p^{-k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p, \tag{2.58}$$

y podemos reescribir los q-polinomios pequeños de Legendre como

$$P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p p^{-kn+k(k-1)/2}(-x)^k. \tag{2.59}$$

Hay una fórmula de Rodrigues para estos q-polinomios pequeños de Legendre en función del operador D_q para el que

$$D_q f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z} & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } z = 0, \end{cases} \tag{2.60}$$

que es

$$P_n(x|q) = \frac{q^{n(n-1)/2}(1-q)^n}{(q;q)_n} D_p^n[(qx;q)_n x^n], \tag{2.61}$$

La cual nos será útil más tarde. Para obtener mayor información y referencia sobre los q-polinomios pequeños de Legendre ver [20].

La ecuación (2.59) expresa los q-polinomios pequeños de Legendre en la base de monomios

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

A veces es más conveniente usar otra base de polinomios, y para los polinomios ortogonales sobre $\{q^k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ una base conveniente es $\{(qx;q)_k, k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Necesitaremos hacer uso de las q-series para este propósito. Recordamos la fórmula q-análoga del binomio de Newton [16]

$$(x;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}(-x)^k, \tag{2.62}$$

y su dual

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{-nk+k(k+1)/2}(x;q)_k. \tag{2.63}$$

Y un resultado más general sobre series q-binomiales es [16]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}, \qquad |q| < 1, |x| < 1. \tag{2.64}$$

Usando (2.63) con el argumento $q^{n+1}x$ en la fórmula de Rodrigues (2.61), entonces tenemos

$$P_n(x|q) = \frac{(1-p)^n}{(p;p)_n} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k q^{-nk+k(k+1)/2} D_p^n (qx;q)_{n+k}.$$

Y fácilmente se encuentra que

$$D_p^k (qx;q)_n = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(1-p)^k} (qx;q)_{n-k}, \tag{2.65}$$

así que, usando (2.58) encontramos la expresión buscada

$$P_n(x|q) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} (qx;q)_k. \tag{2.66}$$

Seguidamente, pasemos a describir las aproximaciónes de Padé, que como veremos guardan una relación directa con los polinomios ortogonales clásicos y q-polinomios en el caso que utilicemos la *aproximación diagonal*, la cual definimos en el siguiente capítulo:

3. Aproximaciones de Padé

3.1. Introducción

La aproximación Padé de una serie de potencias es una función racional de numerador de grado p y denominador q cuya serie de potencias coincide con la de la función hasta el grado $p+q$ incluido. Según los valores de p y q puede tener una utilidad u otra, nos puede dar información del comportamiento de la función fuera de su radio de convergencia, y acelerar funciones que convergen lentamente en su radio de convergencia.
Dichas aproximaciones pueden aplicarse en dicersos campos de la física, química, ingeniería electrica, y otras áreas, de hecho en [6] se puede encontrar una buena referencia con una gran variedad de aplicaciones donde se utilizan las aproximaciones de Padé, por ejemplo en Teoría de convergencia, en el estudio de series de Stieltjes y de Polya, en el análisis numérico para obtener las desigualdades de Chebyshev para la función de densidad, e incluso podemos relacionarlas con la teoría cuántica de campos para el estudio de osciladores armónicos o para el estudio de la dispersión Pión-Pión, entre otros.

3.2. Definiciones Básicas

Sea f una serie formal de potencias en una variable

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

Nuestro propósito es el de construir una fracción racional cuyo denominador tenga grado k y cuyo numerador tenga grado $k-1$ de manera que su desarrollo ascendente en potencias de t coincida con el de f al menos hasta el grado $k-1$.
Hay varias razones por las que buscar estas aproximaciones para las series. La primera es que se obtienen aproximaciones de funciones que podemos utilizar en la computación. La segunda es que se pueden acelerar series que convergen lentamente y la tercera es que no necesitamos todos los coeficientes de la serie sino que nos basta conocer los primeros de la misma.
Comenzaremos el estudio definiendo un funcional lineal c sobre el espacio de los polinomios de variable real como

$$c(x^i) = c_i, \qquad \forall\ i = 0, 1, \dots .$$

A los c_i los llamaremos *momentos de órden i del funcional c.*

Lema 3.1 : $f(t) = c((1-x^t)^{-1})$.

Prueba: Nos basta dar el desarrollo en serie de potencias de $(1-xt)^{-1}$ y aplicar el funcional

$$c((1-xt)^{-1})) = c\left(\sum_{k=0}^{\infty}(xt)^k\right) = c(1) + c(x)t + c(x^2)t^2 + \cdots = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots = f(t).$$

□

Sea v un polinomio arbitrario de grado k

$$v(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k,$$

y sea w

$$w(t) = c\left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t}\right),$$

donde c actua sobre la variable x y t es un parámetro. Entonces se cumple el siguiente

Lema 3.2 : *w es un polinomio de grado $k-1$ cuyos coeficientes pueden escribirse como*

$$w(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i, \qquad a_i = \sum_{j=0}^{k-i-1} c_j b_{i+j+1} \qquad i = 0, \ldots, k-1.$$

Prueba: Es claro que

$$\frac{v(x) - v(t)}{x - t} = b_1 + b_2(x+t) + \cdots + b_k(x^{k-1} + x^{k-2}t + \cdots + xt^{k-2} + t^{k-1}),$$

ya que

$$\frac{x^i - t^i}{x - t} = x^{i-1} + x^{i-2}t + \cdots + xt^{i-2} + t^{i-1}.$$

Aplicando c a ambos miembros tenemos el resto del aserto.

□

Nota 3.1 : *Nótese que si tomamos dos polinomios que difieren en el término constante se tiene el mismo polinomio w.*

Ahora definimos $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ como

$$\tilde{v}(t) = t^k v(t^{-1}),$$
$$\tilde{w}(t) = t^{k-1} w(t^{-1}).$$

Un sencillo cálculo nos muestra que $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ invierten los coeficientes, i.e.

$$\tilde{v}(t) = b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \cdots + b_k,$$

$$\tilde{w}(t) = a_0 t^{k-1} + a_1 t^{k-2} + \cdots + a_{k-1}.$$

Es por ésta razón que diremos que w (o $\tilde{w}$) es el polinomio asociado (de primer tipo) a v (o $\tilde{v}$) respecto al funcional c. Veamos uno de los principales resultados de esta sección

Teorema 3.1 :

$$\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)} - f(t) = \mathcal{O}(t^k), \qquad t \to 0.$$

Prueba: Consideremos la serie

$$\tilde{w}(t) - \tilde{v}(t) f(t).$$

Es fácil ver con lema 3.2 que la serie comienza con el término en t^k, luego si dividimos por $\tilde{v}(t)$ se mantiene el mismo resultado.

□

A tal aproximación racional de f la denotaremos por

$$(k - 1/k)_f(t)$$

y la llamaremos *aproximación de tipo Padé de* f.
Ahora veremos cómo construir aproximaciones racionales de f con distintos grados en el numerador y denominador. La serie f puede escribirse como

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + t^{n+1} f_n(t),$$

con

$$f_n(t) = c_{n+1} + c_{n+2} t + \cdots . \tag{3.1}$$

Luego podemos considerar la siguiente fracción racional

$$c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + t^{n+1} (k - 1/k)_{f_n}(t),$$

donde $(k-1/k)_{f_n}(t)$ es la aproximación tipo Padé de $f_n(t)$, es decir,

$$(k - 1/k)_{f_n}(t) = \tilde{w}(t)/\tilde{v}(t), \qquad \text{con} \qquad w(t) = c^{(n+1)}\left(\frac{v(x) - v(t)}{x - t}\right),$$

donde el funcional $c^{(n+1)}$ se define como

$$c^{(n)}(x^i) = c(x^{n+i}) = c_{n+i}.$$

La razón de esta elección es que el término independiente de f_n es c_{n+1} según (3.1).
Así, en general, a la fracción racional de numerador de grado k y denominador de grado $n+k$ que aproxima a f la denotaremos por

$$(n + k/k)_f(t).$$

Teorema 3.2 :

$$(n + k/k)_f(t) - f(t) = \mathcal{O}(t^{n+k+1}).$$

Prueba: El resultado se tiene rápidamente del hecho de la definición de $(n+k/n)_f(t)$ y de que

$$(k - 1/k)_{f_n}(t) - f_n(t) = \mathcal{O}(t^k).$$

□

Además, debido a que el funcional c es lineal es fácil comprobar, por una parte

$$c^{(n+1)}((1 - xt)^{-1}) = c(x^{n+1}(1 - xt)^{-1}).$$

Por otra parte, se tiene la siguiente identidad

$$(1 - xt)^{-1} = x^{-n+1} t^{-n+1} (1 - xt)^{-1} - (xt)^{-1} - \cdots - (xt)^{-n+1}. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, aplicando el funcional c a (3.2) y usando la convención de que $c(x^i) = c_i$ para $i < 0$, obtenemos que

$$f(t) = t^{-n+1} c(x^{-n+1}(1 - xt)^{-1}) = t^{-n+1}(c_0 t^{n-1} + c_1 t^n + \cdots).$$

Definamos

$$\overline{f}_n(t) = 0 + 0t + \cdots + 0t^{n-2} + c_0 t^{n-1} + c_1 t^n + \cdots ,$$

entonces podemos construir una aproximación tipo Padé de $\overline{f}_n$ cuyo denominador tenga grado $n+k$ y cuyo denominador tenga grado $n+k-1$. Así, al igual que en el proceso anterior, se tiene que

$$t^{-n+1}(n+k-1/n+k)_{\overline{f}_n}(t) = \tilde{w}(t)/\tilde{v}(t).$$

Como los primeros $n-1$ coeficientes de $\overline{f}$ son cero, por el lema 3.2, w es un polinomio de grado k y $\tilde{w}$ es un polinomio cuyo grado está entre $n-1$ y $n+k-1$. Luego, la fracción racional

$$t^{-n+1}(n+k-1/n+k)_{\overline{f}_n}(t),$$

tiene denominador de grado $n+k$ y denominador de grado k. Así, denotaremos a esta fracción por

$$(k/n+k)_f(t).$$

Al igual que en los casos anteriores se tiene un teorema que nos predice lo "buena" que es la aproximación:

Teorema 3.3 :

$$(k/n+k)_f(t) - f(t) = \mathcal{O}(t^{k+1}).$$

La prueba de nuevo es análoga a las anteriores, basta aplicar teorema 3.1 obteniendo

$$(n+k-1/n+k)_{\overline{f}_n}(t) - \overline{f}_n(t) = \mathcal{O}(t^{n+k}),$$

y el resultado es inmediato.

Nota 3.2 : *Podríamos haber definido esta última parte de una manera análoga a la anterior definiendo el numerador $\tilde{w}$ de $(n+k-1/n+k)_{\overline{f}_n}$ a partir de*

$$w(t) = c^{(-n+1)}\left(\frac{v(x)-v(t)}{x-t}\right),$$

y tomando

$$\tilde{w}(t) = t^{n+k-1}w(t^{-1}).$$

Todo lo anterior nos permite construir una aproximación racional con grados arbitrarios, tanto del numerador como del denominador, a las que, en general, denotaremos por

$$(p/q)_f(t),$$

donde p es el grado del numerador y q el del denominador, que pueden escribirse de la forma

$$(p/q)_f(t) = \sum_{i=0}^{p-q} c_i t^i + t^{p-q+1}\tilde{w}(t)/\tilde{v}(t),$$

donde v es un polinomio arbitrario de grado q y

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= t^q v(t^{-1}),\\
w(t) &= c^{(p-q+1)}\left(\frac{v(x)-v(t)}{x-t}\right),\\
\tilde{w}(t) &= t^{q-1} w(t^{-1}),
\end{aligned}$$

con la convención de que la suma vale cero si $p < q$.
Al polinomio v le llamaremos *polinomio generador de la aproximación*. Obviamente, podemos unificar los tres teoremas vistos hasta ahora en el siguiente resultado

$$(p/q)_f(t) - f(t) = \mathcal{O}(t^{p+1}).$$

Luego, como ya mencionamos en la introducción de este capítulo, para obtener un cómputo de la aproximación racional de f de orden p nos basta con conocer c_0, c_1, $\cdots$, c_p.
Por construcción es claro que las aproximaciones tipo Padé pueden expresarse mediante la *'tabla'*

(0/0)	(0/1)	(0/2)	$\cdots$
(1/0)	(1/1)	(1/2)	$\cdots$
(2/0)	(2/1)	(2/2)	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

con $(p/0)_f(t) = c_0 + \cdots c_p t^p$.
Ésta es conocida como tabla de Padé, a los elementos (k/k) se les llama aproximaciones diagonales, los cuales, como veremos, tienen una gran relevancia en nuestro trabajo. Además, se tienen relaciones de recurrencia entre los elementos de esta tabla si los polinomios que la generan forman parte de una familia de polinomios ortogonales. Así, podemos ver cómo comienzan a aparecer relaciones entre estas aproximaciones y los polinomios ortogonales, aunque también pueden darse relaciones de recurrencia en otros casos.

3.3. Propiedades Básicas

En esta sección veremos, en principio, propiedades algebraicas de este tipo de aproximaciones, así como el estudio del error que se comete al realizar aproximaciones de tipo Padé. La primera propiedad es la unicidad

Propiedad 3.1 : *Sean W y V polinomios de grados p y q respectivamente tales que*

$$W(t)/V(t) - f(t) = \mathcal{O}(t^{p+1}).$$

Entonces

$$W(t)/V(t) = (p/q)_f(t),$$

donde el denominador de (p/q) viene dado por V.

Prueba: Supongamos $p \geq q$. Entonces $W(t)/V(t)$ puede escribirse como

$$W(t)/V(t) = R(t) + t^{p-q+1} Q(t)/V(t),$$

donde R tiene grado $p-q$ y Q tiene a lo más grado $q-1$. Esto nos lleva a decir que

$$R(t) = \sum_{i=0}^{p-q} c_i t^i,$$

y que $Q(t)/V(t) = c_{p-q+1} + c_{p-q+2}t + \cdots + c_p t^{q-1} + \mathcal{O}(t^q)$. Por lo tanto los coeficientes de los polinomios Q y V están relacionados de una forma similar como lo estaban los del lema 3.2. Esto quiere decir que Q es el asociado a V respecto el funcional $c^{(p-q+1)}$ y que $W(t)/V(t) = (p/q)_f(t)$ como se vió en la sección anterior. El caso $q > p$ puede realizarse de una forma análoga.

□

Esta propiedad es muy importante y nos permite obtener resultados de una manera muy sencilla como veremos en la siguiente propiedad

Propiedad 3.2 : *Sea $K(t) = af(t) + R_k(t)$ donde a es una constante y R_k un polinomio de grado $k \leq p-q$. Entonces,*

$$(p/q)_K(t) = a(p/q)_f(t) + R_k(t),$$

si las dos aproximaciones tienen el mismo (polinomio) denominador, es decir, el mismo generador.

Prueba: Se tiene que

$$\begin{aligned} &(p/q)_K(t) = af(t) + R_k(t) + \mathcal{O}(t^{p+1}), \\ &a(p/q)_f(t) + R_k(t) = af(t) + R_k(t) + \mathcal{O}(t^{p+1}). \end{aligned}$$

Si $q + k \leq p$ entonces $a(p/q)_f + R_k$ es el cociente de un polinomio de grado p y otro de grado q, de donde se sigue la propiedad.

□

Propiedad 3.3 : *Supongamos que $f(0) = 0$ y sea $tg(t) = f(t)$. Entonces*

$$t(k-1/k)_g(t) = (k/k)_f(t),$$

si las dos aproximaciones están construidas con el mismo denominador.

Prueba: Como $f(0) = 0$ quiere decir que $c_0 = 0$, así tenemos

$$g(t) = c_1 + c_2 t + \cdots \ .$$

Además $t(k-1/k)_g(t) = tg(t) + \mathcal{O}(t^{k+1}) = f(t) + \mathcal{O}(t^{k+1})$. Como $t(k-1/k)_g(t)$ es el cociente de dos polinomios de grado k, por la unicidad, se tiene que es igual a $(k/k)_f(t)$.

□

Propiedad 3.4 : *Si*

$$(p/q)_f(t) = P_1(t)/Q(t) = f(t) + At^{p+1} + \mathcal{O}(t^{p+2}),$$

y

$$(p+1/q)_f(t) = P_2(t)/Q(t),$$

entonces

$$P_2(t) = P_1(t) - AQ(0)t^{p+1}.$$

Prueba:

$$(p+1/q)_f(t) = f(t) + \mathcal{O}(t^{p+2}) = \frac{P_2(t)}{Q(t)} = \frac{P_1(t)}{Q(t)} - At^{p+1} + \mathcal{O}(t^{p+2}).$$

□

Ahora, una vez vistas algunas propiedades sencillas relativas a las aproximaciones de Padé, pasemos a estudiar el comportamiento del error en tales aproximaciones

Teorema 3.4 :

$$f(t) - (k-1/k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}(t)} c\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right).$$

Prueba:

$$\tilde{w}(t) = t^{k-1} c\left(\frac{v(t^{-1} - v(x)}{t^{-1}-x}\right) = c\left(\frac{t^k v(t^{-1}) - t^k v(x)}{1-xt}\right) = \tilde{v}(t)f(t) - t^k c\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right),$$

y el resultado es directo aplicando el lema 3.1.

□

Este Teorema nos muestra que $(k-1/k)_f(t)$ puede calcularse reemplazando $(1-xt)^{-1}$ por

$$\left(1 - \frac{v(x)}{v(t^{-1})}\right)(1-xt)^{-1},$$

en $f(t) = c((1-xt)^{-1})$. Así por este teorema podemos fácilmente obtener el siguiente

Corolario 3.1 :

$$f(t) - (k-1/k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}(t)} \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i,$$

con $d_i = c(x^i v(x)) = b_0 c_i + b_1 c_{i+1} + \cdots + b_k c_{i+k}$.

En algunos casos el funcional c puede calcularse explícitamente. Supongamos que f es holomorfa en una región D' simplemente conexa del plano complejo la cual contiene al origen y sea C' una curva simple en D', entonces como consecuencia del Teorema de Cauchy se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-t} dz,$$

donde t recorre el interior de C'.
Si cambiamos z por x^{-1}, entonces Obtenemos[10]

$$c\left(\frac{1}{1-xt}\right) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^{-1}f(x^{-1})}{1-xt} dx.$$

donde C y D son los transformados de C' y D', bajo dicho cambio de variable, respectivamente, además nótese que $\infty \in D$.
Con ésto, podemos concluir que una representación del funcional c es la siguiente

$$c(F(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C x^{-1} f(x^{-1}) F(x) dx.$$

[10] Como consecuencia del lema 3.1

Usando esta representación podemos obtener la siguiente expresión para el error de las aproximaciones de tipo Padé:

$$f(t) - (k-1/k)_f(t) = \frac{t^k}{\tilde{v}(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-1} f(x^{-1}) v(x)}{1-xt} dx.$$

Finalmente, a partir del teorema 3.4 se obtiene el siguiente

Corolario 3.2 :

$$f(t) - (p/q)_f(t) = \frac{t^{p+1}}{\tilde{v}(t)} c^{(p-q+1)} \left(\frac{v(x)}{1-xt} \right),$$

donde v es el polinomio generador de $(p/q)_f$.

Para un estudio más completo y detallado ver, por ejemplo, [14].

3.4. Aproximaciones de Padé para las funciones de Markov

Para nuestro propósito es suficiente considerar las aproximaciones (diagonales) de Padé en el infinito. Sea f una función, cuya expresión formal cerca del infinito viene dada por

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{z^{k+1}}. \tag{3.3}$$

El problema consiste en encontrar un polinomio P_n de grado $\leq n$ y un polinomio Q_n de grado $\leq n-1$ tal que

$$f(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}} \right), \tag{3.4}$$

Es decir, encontrar el aproximante de Padé $(n/n)_f$.
Para P_n hay $n+1$ coeficientes y para Q_n hay n coeficientes, luego tenemos $2n+1$ incógnitas. Además, como hemos visto, hay un grado de libertad ya que podemos multiplicar numerador y denominador por un factor común. Por lo tanto, tenemos $2n$ parámetros. E imponiendo que los coeficientes de z^{-k} en el desarrollo de $f(z) - Q_n(z)/P_n(z)$ sean cero para $k = 1, 2, ..., 2n$, obtenemos $2n$ ecuaciones. De cualquier forma, ésto nos hace ver que este camino de formular el problema de la aproximación de Padé nos puede causar muchas dificultades, e.g., los polinomios Q_n y P_n no son únicos debido al factor común que podemos introducir (lo que sucede cuando hay bloques en la tabla de Padé). Así, una mejor formulación del problema sería la de encontrar Q_n y P_n tales que

$$P_n(z) f(z) - Q_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}} \right).$$

ésto produce $2n$ ecuaciones lineales con $2n$ parámetros libres. Veamos a continuación cómo la aproximación de Padé se relaciona estrechamente con los polinomios ortogonales.
Para ver esto, tomemos una curva Γ que encierre al origen (o mejor: que encierre al infinito), entonces multiplicando ambos miembros de (3.4) por z^k e integrando encontramos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma P_n(z) z^k f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_n(z) z^k dz = \sum_{j=n}^{\infty} a_j \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{k-j-1} dz.$$

Por el Teorema de Cauchy, la integral de $Q_n(z)z^k$ es cero ya que el integrando es un polinomio. Además, por el Teorema de los residuos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^m dz = 0, \qquad m \neq -1.$$

Por lo tanto, *formalmente*, tenemos la siguiente ortogonalidad

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P_n(z)z^k f(z)dz = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.5}$$

La función 'peso' viene dada por la función f que estamos aproximando. Ésto es una ortogonalidad *formal* ya que la ortogonalidad no está asociada con un producto interior sino con un funcional L actuando sobre polinomios P como sigue

$$L(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P(z)f(z)dz.$$

No obstante, cuando la función f es de una naturaleza particular, entonces dicha ortogonalidad *formal* se traduce en una ortogonalidad *real* asociada a un producto interior. De hecho, si f es una *función de Markov*, es decir

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z-x}, \tag{3.6}$$

donde $[a, b]$ es un intervalo real acotado y μ es una medida real positiva sobre $[a, b]$, entonces si desarrollamos $1/(z-x)$ usando la serie geométrica

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}, \tag{3.7}$$

el desarrollo cerca del infinito de f es

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b x^k d\mu(x),$$

luego los coeficientes c_k en el desarrollo (3.3) son los momentos de la medida μ. Usualmente esta medida se toma como una medida de probabilidad, i.e. $\int d\mu = 1$, luego $f(z)$ se comporta como $1/z$ cuando $z \to \infty$. Por lo tanto, los polinomios en la aproximación de Padé pueden tomarse mónicos. Si elegimos una curva cerrada Γ que contenga al intervalo $[a, b]$, entonces podemos intercambiar las integrales en (3.5) (la integral está acotada para $x \in [a, b]$ y $z \in \Gamma$, por lo tanto podemos usar el Teorema de Fubini) para hallar

$$\int_a^b \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{P_n(z)z^k}{z-x} dz \; d\mu(x) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ahora aplicamos el Teorema de los residuos obteniendo que

$$\int_a^b P_n(x)x^k d\mu(x) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.8}$$

Por lo tanto, los denominadores de la aproximación de Padé para las funciones de Markov se obtienen como una sucesión de polinomios ortogonales sobre $[a, b]$ respecto a la medida μ de la función de Markov (3.6)[11]. Sea

$$Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z-x} d\mu(x), \tag{3.9}$$

[11] Esta forma de introducir los polinomios ortogonales está descrita con detalle en [14].

entonces Q_n es un polinomio de grado $n-1$. Además, este polinomio es el numerador de la aproximación de Padé. Para ver ésto, calculamos

$$P_n(z)f(z) - Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(z)}{z-x} d\mu(x) - \int_a^b \frac{P_n(z)-P_n(x)}{z-x} d\mu(x),$$

por lo tanto,

$$P_n(z)f(z) - Q_n(z) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{z-x} d\mu(x). \tag{3.10}$$

Desarrollando $1/(z-x)$ y usando la serie geométrica (3.7) entonces de la ortogonalidad (3.8) se deduce que se tiene (3.4).

Para la aproximación de Padé es necesario, ante todo, encontrar el denominador P_n, que se calcula resolviendo un sistema de n ecuaciones con n incognitas (recordar que P_n está determinado salvo una constante), que se obtiene usando las n condiciones de ortogonalidad (3.8). Una vez que se conoce P_n, se puede encontrar el numerador Q_n a partir de (3.9). Además, (3.10) nos da una expresión cerrada para el resto del problema de la aproximación.

3.5. Aproximaciones de Padé con *Mathematica*

En este apartado pretendemos mostrar un algoritmo muy sencillo para calcular los aproximantes (p, q) descritos previamente. Enunciemos el teorema que nos permitirá definir dicho algoritmo para el calculo de las aproximaciones de Padé de orden (n, n):

Teorema 3.5 : *Sea $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$. Supongamos que f tiene $2n+1$ derivadas continuas en un entorno de $x = 0$. Entonces f tiene un aproximante de Padé (n, n) y los coeficientes a_i y b_i satisfacen el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n} \frac{f^{(n-m+k)}(0)}{(n-m+k)!} b_m &= -\frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{m=0}^{k} b_m \frac{f^{(k-m)}(0)}{(k-m)!} &= a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

La demostración de este teorema es directa y la omitiremos.

Veamos un ejemplo sencillo del funcionamiento de dicho algoritmo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

En primer lugar definamos la función que queremos aproximar y el orden de la aproximación p:

```
In[1]:=
f[x_]=1/Sqrt[4-x^2];
p=4;co=f[0];
```

Definamos el vector de las derivadas hasta orden $n = 8$

```
In[2]:=
c=Table[(1/k!) D[f[x],{x,k}]/.x->0,{k,2p}]
```

```
Out[2]:=
     1        3        5         35
{0, --, 0, ---, 0, ----, 0, -----}
     16      256      2048      65536
```

Definamos ahora la matriz A del sistema 3.11

```
In[3]:= A=Table[c[[p-m+k]],{k,p},{m,p}]
Out[3]:=
   3      1             3      1      5         3
{{---, 0, --, 0}, {0, ---, 0, --}, {----, 0, ---, 0},
  256     16           256     16    2048      256
      5        3
{0, ----, 0, ---}}
     2048     256
```

El término independiente del sistema, e, lo podemos escribir de la forma:

```
In[4]:=
e=Table[-c[[p+k]],{k,p}]
Out[4]:=
        5           35
{0, -(----), 0, -(-----)}
       2048        65536
```

Resolviendo el sistema tenemos:

```
In[5]:=
b=LinearSolve[A,e]
Out[5]:=
       5        5
{0, -(--), 0, ---}
       16      256
In[6]:=
a=Table[c[[k]]+Sum[b[[m]] c[[k-m]],{m,k-1}]+ b[[k]] co,{k,p}]
Out[6]:=
       3        1
{0, -(--), 0, ---}
       32      512
```

Finalmente, definimos el aproximante de Padé:

```
In[7]:=
pade[x_]:=(co+Sum[a[[i]] x^i,{i,p}])/(1+Sum[b[[i]] x^i,{i,p}])
pade[x]
Out[7]:=
        2    4
```

```
1   3 x     x
- - ---- + ---
2    32    512
---------------
       2      4
    5 x    5 x
1 - ---- + ----
     16    256
```

Debemos destacar que el *Mathematica* tiene un paquete que nos permite calcular el aproximante de Padé de orden (p, q) de la función. Para ello es necesario cargar el paquete Calculus'Pade'. El comando **Pade**$[f, x, x_0, p, q]$ nos da el aproximante de Padé de orden (p, q) de la función $f(x)$ en torno al punto x_0.

Finalmente, calculemos el aproximante de Padé de orden (p, q) con $p \neq q$. Para ello podemos utilizar el comando **LogicalExpand**. Por ejemplo calculemos el aproximante de orden $(2, 4)$ de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

```
In[8]:=
n=2;m=4;
ser=Series[f[x],{x,0,n+m}];
p[x_]:=Sum[a[k] x^k, {k,0,n}];
q[x_]:=x^m+Sum[b[k] x^k,{k,0,m-1}];
coef=Solve[LogicalExpand[ser * q[x] - p[x]==0]]
pade[x_]:=p[x]/q[x] /. coef[[1]]
Out[8]:=
{{a[0] -> 64, b[0] -> 128, a[1] -> 0, b[1] ->0,
a[2] -> -8, b[2] -> -32, b[3] -> 0}}
In[9]:=
pade[x]
Out[9]:=
           2
   64 - 8 x
----------------
          2    4
128 - 32 x  + x
```

Por último veamos que efectivamente nuestro algoritmo nos da la aproximación correctamente comparandola con la que da el paquete mencionado previamente

```
In[10]:=
<<Calculus'Pade'
In[11]:=
Simplify[Pade[f[x],{x,0,n,m}]-pade[x]]
Out[11]:=
```

0

Por último decir que dicho paquete informático tiene otros subdirectorios muy completos de interpolación[12]

[12] Para más información ver [21].

4. Aproximaciones de Padé simultáneas (Hermite-Padé)

Trás este primer capítulo en el que hemos dado las nociones de la aproximación de Padé para una función, veamos cómo extender dicha aproximación para obtener una aproximación racional de varias funciones simultáneamente. Este concepto data del siglo pasado y se le conoce como aproximaciones de Hermite-Padé.
Consideremos r funciones $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ con un desarrollo formal cerca del infinito dado por

$$f_j(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,j} \frac{1}{z^{k+1}}, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Dado un multi-índice n, i.e., $n = (n_1, \ldots, n_r)$, con n_i enteros , distingiremos dos tipos de aproximaciones distintas:

1. Aproximación de tipo I: El objetivo es encontrar polinomios $A_{n_1}, \ldots, A_{n_r}$, donde A_{n_j} es de grado $n_j - 1$ y un polinomio B_n tal que

$$A_{n_1}(z)f_1(z) + \cdots + A_{n_r}(z)f_r(z) - B_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{|n|}}\right), \quad |n| = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \quad (4.1)$$

2. Aproximación de tipo II: El objetivo es hallar un polinomio P_n de grado $\leq |n| = n_1 + \cdots + n_r$, y polinomios $Q_{n_1}, \ldots, Q_{n_r}$ tales que

$$P_n(z)f_j(z) - Q_{n_j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, r. \qquad (4.2)$$

Una noción importante en las aproximación de Hermite-Padé es la normalidad.

Definicion 4.1 : *Un índice $n \in \mathbb{Z}_+^r$, $n \neq 0$ se dice normal para un problema de aproximación si se obtienen polinomios con el mayor grado posible esperado.*

Nota 4.1 : *En el caso que todos los polinomios sean normales se tiene la unicidad para el problema.*

Así, en el caso Padé, si todos los índices de la aproximación son normales, entonces la tabla de Padé no contiene bloques, i.e. las secciones de la tabla de Padé contienen las mismas funciones racionales como aproximación. La normalidad también es importante en las aproximaciones de Hermite-Padé. Un multi-índice es normal para la aproximación de tipo I si el grado de cada A_{n_j} es $n_j - 1$. De la misma forma n es normal en la aproximación de tipo II si el grado de Q_n es $|n|$.
Hay un tipo de funciones particularmente importantes para este tipo de aproximaciones; éstas son las funciones de Markov, ya mencionadas anteriormente, puesto que todos sus índices son normales. Hay diversas formas de definir los sistemas de Markov para aproximaciones de Hermite-Padé, para los cuales los índices relevantes son normales. Pasemos a ver algunos de estos sistemas de Markov.

4.1. Sistemas de Chebyshev

Este primer sistema de Markov, es conocido como sistema de Chebyshev. Los sistemas de Chebyshev se emplean a menudo en la teoría de la aproximación, estadística matemática, entre otros, ver [24]. Pasemos a definirlo

Definicion 4.2 : *Un conjunto de funciones reales*

$$u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t), \tag{4.3}$$

continuas en un intervalo real $[a,b]$*, se dice que forman un* <u>*sistema de Chebyshev*</u> *(o T-sistema*[13]*) de órden* $n \in \mathbb{Z}_+$*, si toda función de la forma*

$$P(t) = \alpha_0 u_0(t) + \cdots + \alpha_n u_n(t), \qquad \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0$$

se anula a lo más en n *puntos de* $[a,b]$*.*

Esta definición es equivalente a que el determinante

$$U(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \det \begin{pmatrix} u_0(t_0) & u_1(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ u_0(t_1) & u_1(t_1) & \cdots & u_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(t_n) & u_1(t_n) & \cdots & u_n(t_n) \end{pmatrix}$$

del sistema

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k(t_j) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

sea no nulo para $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$. Como U es una función continua y $U \neq 0$, entonces U no cambia de signo en cada uno de los subintervalos (t_i, t_{i+1}). Si $U > 0$, a (4.3) se le denomina T_+-sistema. Las siguientes propiedades elementales se deducen fácilmente.

1. Dados n puntos distintos $t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_n$ de $[a,b]$, hay una función $P(t)$, no trivial, en un T-sistema de orden n dado con ceros en dichos puntos. Además esta función queda completamente determinada salvo un factor de proporcionalidad: $P(t) = CU(t, t_1, t, \ldots, t_n)$, $C \neq 0$.

2. Hay exactamente una función $P(t)$ en un T-sistema de órden n que toma $n+1$ valores asignados previamente sobre $n+1$ puntos de $[a,b]$.

4.2. Sistemas de Angelesco. Extensiones

La noción de sistema de Angelesco la introdujo Angelesco [3] en 1919. Un sistema de Angelesco es un sistema de fuciones tipo Markov de la forma:

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad j = 1, 2 \ldots, r,$$

donde Δ_j son intervalos disjuntos dos a dos, i.e. $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, y μ_j es una medida positiva sobre los Δ_j, o sea, cada función f_j es una función de Markov y los

[13]Se llama así debido a que en francés Chebyshev se transcribe como **T**chebysheff

soportes de las medidas μ_i son r intervalos disjuntos. Otro sistema interesante es el sistema de Angelesco-Chebyshev (AT-sistema) donde tenemos un conjunto de funciones tipo Markov pero ahora definidas con una misma una medida y en un único intervalo, pero con diferentes pesos (densidades) para cada función. En particular,

$$f_j(z) = \int_a^b \frac{u_j(t)}{z-t} d\mu(t), \qquad j = 1, \ldots, r,$$

donde $u_1(t), \ldots, t^{n_1-1}u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t), \ldots, t^{n_r-1}u_r(t)$ es un sistema de Chebyshev sobre $[a,b]$ y μ es una medida positiva sobre $[a,b]$. Finalmente un sistema aún más complejo es el sistema de Nikishin (N-sistema) [25]. Este sistema está constituido por funciones tipo Markov sobre un mismo intervalo pero con pesos definidos en términos de funciones de Markov sobre intervalos disjuntos. Para definir estos sistemas necesitaremos la notación introducida en [17]. Sea, σ_1 y σ_1 dos medidas reales y sean Δ_1 y Δ_2 los intervalos (abiertos) más pequeños que contienen al soporte de σ_1 y σ_2, respectivamente. Supondremos que $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Definiremos a continuación una nueva medida $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ mediante la fórmula

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = \int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} d\sigma_1(x) = \hat{\sigma}_2(x) d\sigma_1(x). \tag{4.4}$$

Es fácil comprobar que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ es una medida real positiva cuyo soporte coincide con el de σ_1. Sea ahora un sistema de intervalos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ tales que $\Delta_{j-1} \cap \Delta_j = \emptyset$, $j = 2, \ldots, m$ y que son los intervalos más pequeños que contienen los soportes de las medidas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, respectivamente. Definamos ahora las medidas[14]

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{j+1} \rangle = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_{j+1} \rangle \rangle, \quad k = 2, \ldots, m-1.$$

Definiremos un sistema de Nikishin como un sistema de funciones tipo Markov siendo las medidas

$$\mu_1 = \langle \sigma_1 \rangle,\ \mu_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \ldots,\ \mu_m = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_m \rangle.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_1(x_1)}{z-x_1}, \\
f_2(z) &= \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_1(x_1)}{z-x_1} \int_{\Delta_2} \frac{d\mu_2(x_2)}{x_1-x_2}, \\
&\vdots \\
f_r(z) &= \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_1(x_1)}{z-x_1} \int_{\Delta_2} \frac{d\mu_2(x_2)}{x_1-x_2} \cdots \int_{\Delta_r} \frac{d\mu_r(x_r)}{x_{r-1}-x_r},
\end{aligned}$$

donde μ_j es una medida positiva sobre el intervalo Δ_j y $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Éste, es un AT-sistema sobre Δ_1 con $u_1 = 1$ y $(u_2, u_3, \ldots, u_n)$ de nuevo un sistema de Nikishin pero ahora para un intervalo Δ_2 disjunto con Δ_1.

Para las funciones de Markov los denominadores de la aproximación de Padé cumplen las

[14] Además supondremos que $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ y $1 \leq i \leq j \leq m$ $|x|^k \in L_1(\langle \sigma_i, \ldots, \sigma_j \rangle)$, $\quad (\langle \sigma_i \rangle = \sigma_i)$.

propiedades de ortogonalidad. Para la aproximación de Hermite-Padé hay un nuevo tipo de ortogonalidad que es bastante útil. Para aproximaciones de tipo I sobre un sistema de Angelesco podemos tomar de nuevo una curva cerrada Γ encerrando a los intervalos Δ_j, luego de (4.1) se deduce que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A_{n_1}(z)f_1(z)+\cdots+A_{n_r}(z)f_r(z))z^k dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma B_n(z)z^k dz = \sum_{j=|n|}^{\infty} a_j \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{k-j}dz.$$

La segunda integral es cero por el Teorema de Cauchy. De la misma manera, el término derecho es cero para $k<|n|-1$ ya que el residuo siempre es cero. En la primera integral usamos que cada f_j es una función de Markov y cambiamos el orden de integración para encontrar

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{\Delta_j} A_{n_j}(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k=0,1,2,\ldots,|n|-2. \tag{4.5}$$

Los polinomios B_n están dados por

$$B_n(z) = \sum_{j=1}^{r}\int_{\Delta_j}\frac{A_{n_j}(z)-A_{n_j}(x)}{z-x}d\mu_j(x),$$

ya que

$$\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(z)f_j(z) - B_n(z) = \sum_{j=1}^{r}\int_{\Delta_j}\frac{A_{n_j}(x)}{z-x}d\mu_j(x), \tag{4.6}$$

y la condición (4.1) se cumple en efecto ya que las condiciones de ortogonalidad (4.5) se cumplen (desarrollar $1/(z-x)$ en potencias de $1/z$). Para AT-sistemas tenemos fórmulas similares, de hecho la ortogonalidad viene dada por

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(x)u_j(x)\right) x^k d\mu(x) = 0, \quad k=0,1,2,\ldots,|n|-2, \tag{4.7}$$

el polinomio B_n viene dado por

$$B_n(z) = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r}\frac{A_{n_j}(z)-A_{n_j}(x)}{z-x}u_j(x)\right)dx,$$

y el resto es

$$\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(z)f_j(z) - B_n(z) = \int_a^b \sum_{j=1}^{r}\frac{A_{n_j}(x)}{z-x}d\mu(x). \tag{4.8}$$

Para aproximaciones de tipo II tomamos la ortogonalidad múltiple (poli-ortogonalidad) para el denominador común P_n, donde las condiciones de ortogonalidad están distribuidas sobre r partes. Para un sistema de Angelesco y una curva cerrada Γ encerrando a todos los intervalos Δ_j, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P_n(z)f_j(z)z^k dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_{n,j}(z)dz = \sum_{i=n_j+1}^{\infty} a_{i,j}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{k-i}dz.$$

De nuevo, la segunda integral es cero por el Teorema de Cauchy, y el término de la derecha tiene residuo no nulo para $k < n_j$. Intercambiando el orden de integración obtenemos la ortogonalidad

$$\int_{\Delta_j} P_n(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \; j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.9}$$

El numerador $Q_{n,j}$ viene dado ahora por

$$Q_{n,j}(z) = \int_{\Delta_j} \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu_j(x),$$

y el resto en la aproximación de tipo II para un sistema de Angelesco es

$$P_n(z)f_j(z) - Q_{n,j}(z) = \int_{\Delta_j} \frac{P_n(x)}{z - x} d\mu_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.10}$$

De nuevo, las fórmulas son muy similares para la aproximación de tipo II de un AT-sistema. Las condiciones de ortogonalidad son

$$\int_a^b P_n(x)x^k u_j(x)d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{4.11}$$

Los numeradores vienen dados por

$$Q_{n,j}(z) = \int_a^b \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} u_j(x)d\mu(x),$$

y el resto para la aproximación de tipo II viene dado por

$$P_n(z)f_j(z) - Q_{n,j}(z) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{z - x} u_j(x)d\mu(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.12}$$

Por último, una vez vista nociones básicas acerca de las Aproximaciones de Padé y sobre polinomios ortogonales, pasemos a ver una aplicación directa de todo en conjunto, como ya mencionamos en la introducción; veremos dos ejemplos, en el primero veremos la irracionalidad de π^2 y $\zeta(3)$, y finalmente, daremos una sencilla prueba de la trascendencia de e, mientras que en el segundo probaremos la irracionalidad de una familia de números algo más complejos como son $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$, y donde nos será de gran utilidad todo lo relativo a los q-polinomios pequeños de Legendre, aproximaciones de Padé simultaneas y sistemas de Chebyshev y Angelesco.

5. Teoría la aproximación y Teoría analítica de números

5.1. Introducción

Vamos a ver ahora cómo muchos de los temas, antes expuestos, de la teoría de aproximación racionales nos permiten probar distintos teoremas de la teoría análitica de números: A saber:

1. La irracionalidad de π^2 (y así, también de π);
2. La prueba de Apéry de la irracionalidad de $\zeta(3)$;
3. La prueba de Hermite de la trascendencia de e.
4. La Irracionalidad de ciertas extensiones de las series armónicas y del logaritmo de 2.

Para probar la irracionalidad de un número real usaremos el siguiente lema:

Lema 5.1 : *Sea x un número real. Si existen enteros p_n y q_n tales que*

1. $q_n x - p_n \neq 0$ *para cada* n,
2. $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0$,

entonces x es irracional.

Prueba: Supongamos que x es racional, entonces $x = p/q$ para ciertos enteros p, q, y

$$q_n x - p_n = \frac{1}{q}\left[pq_n - qp_n\right].$$

Pero $pq_n - qp_n$ es un entero y por la suposición 1 no es cero, así $|pq_n - qp_n| \geq 1$. Pero entonces $|q_n x - p_n| \geq 1 \geq 1/|q|$, y ésto nos conduce a que la suposición 2 no es posible. Así, la contradicción implica que x no puede ser racional.

$\square$

Además, si $|x - p_n/q_n| = \mathcal{O}(1/q_n^{s+1})$ con $0 < s < 1$ y $q_n < q_{n+1} < q_n^{1+o(1)}$, entonces la medida de la irracionalidad $r(x)$ (número de Liouville-Roth)

$$r(x) = \inf\left\{r \in \mathbb{R} : |x - a/b| < 1/b^r \text{ tiene un } n^\circ \text{ finito de soluciones enteras en } (a,b)\right\}$$

verifica que $1 + s < r(x) < 1 + 1/s$ (ver, e.g., [11], ejercicio 3 en pág. 376).
Observe que el lema implica que dichos números irracionales x pueden aproximarse a través de números racionales p_n/q_n tanto como queramos. Para cieros números reales conocidos, tales como π^2, y $\zeta(3)$ usaremos resultados de la Teoría de la aproximación (aproximaciones racionales) para construir los enteros p_n y q_n explícitamente.
Por último, destacar que que para el cálculo de ciertos límites se ha empleado el Teorema de los Números primos en dos de sus versiones más conocidas,

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1,$$

   donde $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales a $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1,$$
donde p_n indica al primo n-ésimo.

La prueba de este teorema puede encontrarse en [18].

5.2. La irracionalidad de π^2

Ahora veremos cómo las aproximaciones de Hermite-Padé pueden usarse para probar la irracionalidad de π^2. Obviamente ésto implica que π es irracional. La irracionalidad de π fue probada por primera vez por Lambert en 1761 y Legendre probó que π^2 es irracional en su *Elements de Géometrie* (1794). La siguiente prueba es una combinación de las ideas de Beukers [7] , Borwein y Erdélyi [13], Apendice A2, y Borwein y al. [12].

Teorema 5.1 : (Legendre) *El número real $\pi^2/6$ es irracional.*

Prueba: Consideremos las dos funciones de Markov siguientes
$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}.$$
Los momentos para estas medidas son
$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \qquad -\int_0^1 x^k \log x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 3, \ldots$$
por lo tanto, tenemos los desarrollos
$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{1}{z^{k+1}}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\frac{1}{z^{k+1}}.$$
Aproximaremos estas dos funciones simultaneamente para encontrar los polinomios A_n, B_n y C_n de grado a lo más n tales que
$$A_n(z) - B_n(z)\log(z) = O((1-z)^{n+1}), \quad z \to 1, \tag{5.13}$$
$$A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5.14}$$
Observe que (5.14) es un problema de aproximación de tipo I para (f_1, f_2), que forman un AT-sistema. Por otra parte , (5.13) es un problema de aproximación de Padé para la función logaritmo. Las dos ecuaciones juntas, requieren polinomios comunes A_n, B_n, por lo tanto la forma del problema de aproximación de tipo II es buena. Así, esto es una combinación de problemas de aproximación de tipo I y II. Consideremos la función
$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x)\log x.$$
El espacio vectorial generado por las funciones
$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \log x, x\log x, x^2\log x, \ldots, x^n\log x\}$$

sobre el intervalo $[0,1]$ es un sistema de Chebyshev de dimensión $2n+2$, y F_n pertenece a este espacio. Como consecuencia, F_n tiene a lo más $2n+1$ ceros sobre $[0,1]$. La condición (5.13) exige que haya un cero de multiplicidad al menos $n+1$ en el punto 1, así que $F_n^{(k)}(1)=0$ para $k=0,1,\ldots,n$. Por integración reiterada, se tiene que

$$F_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_x^1 (t-x)^n F_n^{(n+1)}(t)dt.$$

Para $F_n^{(n+1)}$ vemos que el polinomio A_n desaparece y por la regla de Leibnitz

$$F_n^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_n^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}},$$

así que $F_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x}D_n\left(\frac{1}{x}\right)$, con D_n un polinomio de grado a lo más n. La solución general de (5.13) puede escribirse como

$$F_n(x) = \int_x^1 (t-x)^n D_n(1/t)\frac{dt}{t},$$

y si denotamos por $E_n(x) = x^n D_n(1/x)$ al polinomio opuesto, entonces tendremos que

$$F_n(x) = \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t)\frac{dt}{t}. \tag{5.15}$$

Lo próximo que determinaremos son los polinomios E_n usando (5.14). Recordemos que éste es un problema de tipo I para un AT-sistema, así tenemos las condiciones de ortogonalidad (4.7)

$$\int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k dx = 0, \qquad k=0,1,\ldots,n-1.$$

ésto muestra que F_n es ortogonal a todos los polinomios de grado al menos $n-1$. Usando la expresión (5.15) obtenemos

$$\int_0^1 x^k \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t)\frac{dt}{t}dx = 0, \qquad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Intercambiando el orden de integración vemos que

$$\int_0^1 E_n(t)\int_0^t (1-x/t)^n x^k dx\frac{dt}{t} = 0, \qquad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Hacemos el cambio de variables $x=ty$, y ahora tenemos que

$$\int_0^1 E_n(t)t^k dt\int_0^1 (1-y)^n y^k dy = 0, \qquad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Ésto nos hace ver que E_n es un polinomio ortogonal sobre todos los polinomios de grado a lo más $n-1$ sobre el intervalo $[0,1]$ respecto a la medida de Lebesgue, por lo tanto [15] E_n es el *polinomio de Legendre*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(-1)^k x^k. \tag{5.16}$$

[15] Como ya vimos en el capitulo primero, se tiene por definición y por la unicidad de los polinomios ortogonales

Sustituyendo (5.16) en (5.15), encontramos que

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^k \int_1^x (1 - x/t)^n t^{k-1} dt.$$

El Teorema del binomio aplicado a $(1 - x/t)^n$ nos da que

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{j} (-1)^{k+j} x^j \int_1^x t^{k-j-1} dt.$$

Obviamente,

$$\int_x^1 t^{k-j-1} dt = \begin{cases} -\log x & \text{si } k = j, \\ \dfrac{1 - x^{k-j}}{k-j} & \text{si } k \neq j, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} x^k, \tag{5.17}$$

y

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{j} (-1)^{k+j} x^j \frac{x^j - x^k}{k-j}. \tag{5.18}$$

Lo que nos interesa está en que

$$f_2(1) = -\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tenemos que tomar $z = 1$ en (5.14), pero esta ecuación también contiene a $f_1(z)$, que diverge para $z = 1$. De cualquier forma, $A_n(1) = 0$, luego $A_n(z) = (z-1)\widehat{A}_{n-1}(z)$, y por lo tanto

$$\lim_{z \to 1} A_n(z) f_1(z) = \widehat{A}_{n-1}(1) \lim_{z \to 1} (1-z) \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0,$$

luego la primera función de Markov no causa problemas. El resto en (5.14) viene dado explícitamente por

$$A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{z - x} dx,$$

y el polinomio C_n es

$$C_n(z) = \int_0^1 \left(\frac{A_n(z) - A_n(x)}{z - x} - \frac{B_n(z) - B_n(x)}{z - x} \log x \right) dx.$$

Así, tomando en (5.14) $z = 1$ nos lleva a que

$$B_n(1)\frac{\pi^2}{6} - C_n(1) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1 - x} dx.$$

y claramente

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}$$

es un entero. Para $C_n(1)$ necesitamos por un lado que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(1)-B_n(x)}{1-x}\log x dx &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x}\log x dx\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^2},\end{aligned}$$

y por otro lado tambien necesitamos

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{1}{k-j}\int_0^1\frac{x^j-x^k}{1-x}dx.$$

Tenemos que

$$\int_0^1 \frac{x^j-x^k}{1-x}dx = H_k - H_j,$$

donde $H_n = \sum_{j=1}^n 1/j$ son los números armónicos, por lo tanto

$$C_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^2} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{H_k-H_j}{k-j}.$$

Así, vemos que $C_n(1)$ no es necesariamente entero, pero si multiplicamos $C_n(1)$ por d_n^2, donde d_n es el mínimo común múltiplo de $\{1,2,\dots,n\}$, entonces $d_n^2 C_n(1)$ es un entero. Así tomaremos $q_n = d_n^2 B_n(1)$ y $p_n = d_n^2 C_n(1)$, y tendremos que

$$q_n\frac{\pi^2}{6} - p_n = d_n^2\int_0^1 \frac{A_n(x)-B_n(x)\log x}{1-x}dx.$$

Necesitamos estudiar la convergencia asintótica de la parte derecha de esta ecuación, de hecho necesitamos ver que tiende a cero. Para la convergencia asintótica de d_n necesitamos

Lema 5.2 : *Sea d_n el mínimo común múltiplo de $1,2,3,\dots,n$. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e.$$

Prueba: El mínimo común múltiplo de $1,2,3,\dots,n$ viene dado por

$$d_n = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_{\pi(n)}^{s_{\pi(n)}},$$

donde p_1, p_2, ... son los números primos, $\pi(n)$ es el número de primos menores o iguales que n, y s_k es el mayor exponente de p_k en la factorización de cada número $m \leq n$. En particular ésto significa que $p_k^{s_k} \leq n$, luego $d_n \leq n^{\pi(n)}$ y así

$$d_n^{1/n} \leq n^{\pi(n)/n} = e^{\log n\pi(n)/n}.$$

Y por el Teorema de los números primos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1,$$

así se tiene que $\limsup_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e$.

$\square$

Pero usando una cota inferior $d_n \geq p_1 p_2 \cdots p_{\pi(n)}$ y el Teorema de los números primos en la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$$

se puede probar también que $\liminf_{n\to\infty} d_n^{1/n} \geq e$, así tenemos que $\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} = e$. De cualquier forma para nuestros propósitos el lema 5.2 nos basta.

Para la parte restante de la parte derecha usamos (5.15) para hallar

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \int_x^1 (1 - x/t)^n E_n(t) \frac{dt}{t} \frac{dx}{1-x},$$

donde E_n es el polinomio de Legendre. Intercambiando el orden de integración, obtenemos

$$\int_0^1 E_n(t) \int_0^t (1 - x/t)^n \frac{dx}{1-x} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_n(t)(1-y)^n}{1-yt} dy dt,$$

donde hemos usado la sustitución $x = yt$. Usando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n (1-x)^n, \tag{5.19}$$

e integrando por partes n veces, se tiene que

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n t^n (1-y)^n (1-t)^n}{(1-yt)^{n+1}} dy dt.$$

Esta integral es positiva, así que $q_n \frac{\pi^2}{6} - p_n \neq 0$ para todo n. Además, un cálculo sencillo nos da que

$$\max_{0 \leq y,t \leq 1} \frac{yt(1-y)(1-t)}{1-yt} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5,$$

Finalmente, usando el lema 5.2, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left| q_n \frac{\pi^2}{6} - q_n \right|^{1/n} \leq e^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 = 0{,}66626... < 1,$$

por lo tanto $q_n \frac{\pi^2}{6} - p_n \to 0$. Así, la irracionalidad de $\pi^2/6$ se tiene por el lema 5.1. $\square$

5.3. La irracionalidad de $\zeta(3)$

Continuando con la misma linea que hasta ahora, veremos una prueba de la irracionalidad de $\zeta(3)$ usando una aproximación de Hermite-Padé. La irracionalidad de $\zeta(3)$ fue anunciada por R. Apéry en 1977 (su prueba fue presentada en [4]), y más tarde Beukers [7] vió como la prueba de Apéry iba en la dirección de la idea en las aproximaciones de Hermite-Padé.

Teorema 5.2 : (Apéry) *El número $\zeta(3)$ es irracional.*

Prueba: Consideremos las tres funciones de Markov siguientes

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \log^2 x \frac{dx}{z-x}.$$

Los momentos de estas medidas son

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \quad -\int_0^1 x^k \log x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad \frac{1}{2}\int_0^1 x^k \log^2 x dx = \frac{1}{(k+1)^3},$$

así, en particular, $f_3(1) = \zeta(3)$, el cual es el número que nos interesa. Nótese que (f_1, f_2, f_3) es de nuevo un AT-sistema. El problema de aproximación es ahora

$$\begin{aligned} A_n(z) &= O(z-1), & z \to 1 \qquad (5.20)\\ A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & z \to \infty \qquad (5.21)\\ A_n(z)f_2(z) + 2B_n(z)f_3(z) - D_n(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), & z \to \infty, \qquad (5.22)\end{aligned}$$

donde A_n, B_n, C_n, D_n son polinomios de grado a lo más n. La ecuación (5.20) significa que $A_n(1) = 0$, así que A_n tiene un cero en 1. Esto es de nuevo necesario, ya que esto significa que $A_n(z)f_2(z)$ es cero cuando $z = 1$. Buscamos una aproximación de $\zeta(3)$, pero tomando $z = 1$ en (5.22) se tiene que $2B_n(1)\zeta(3) - D_n(1)$ en la parte izquierda, e investigaremos el comportamiento asintótico de esta cantidad. Nótese además que tanto (5.21) como (5.22) son un problema de tipo I, para los sistemas (f_1, f_2) y (f_2, f_3) respectivamente. Estos dos problemas combinados forman un problema de aproximación de tipo II con denominador común el par (A_n, B_n).

Las condiciones de ortogonalidad de estos problemas de aproximación de tipo I son

$$\begin{aligned} \int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k dx &= 0, & k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (5.23)\\ \int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k \log x dx &= 0, & k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Teniendo en mente la prueba de la irracionalidad de $\pi^2/6 = \zeta(2)$, escribimos que

$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x)\log x = \int_x^1 E_n(x/t)E_n(t)\frac{dt}{t},$$

donde E_n son de nuevo los polinomios de Legendre (5.16). En realidad, ésta es una función sobre el espacio vectorial generado por

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \log x, x \log x, x^2 \log x, \ldots, x^n \log x\},$$

la cual es cero suando $x = 1$, así que $A_n(1) = 1$. Además, intercambiando el orden de integración se tiene que

$$\int_0^1 x^k \int_x^1 E_n(x/t)E_n(t)\frac{dt}{t}dx = \int_0^1 E_n(t)\int_0^t E_n(x/t)x^k dx\frac{dt}{t}.$$

Ahora sustituimos $x = yt$, quedándonos

$$\int_0^1 F_n(x)x^k dx = \int_0^1 E_n(t)t^k dt\int_0^1 E_n(y)y^k dy,$$

la cual es cero para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Ésto nos asegura (5.23). Análogamente,

$$\int_0^1 x^k \log x\int_x^1 E_n(x/t)E_n(t)\frac{dt}{t}dx = \int_0^1 E_n(t)\int_0^t E_n(x/t)x^k \log x dx\frac{dt}{t}.$$

El cambio de variables $x = yt$ ahora nos da

$$\int_0^1 F_n(x)x^k \log x dx = \int_0^1 E_n(t)t^k \int_0^1 E_n(y)y^k(\log y + \log t)dydt.$$

Esta última doble integral es simétrica en y y t así, es igual a

$$2\int_0^1 E_n(t)t^k \log t dt\int_0^1 E_n(y)y^k dy,$$

y de nuevo es cero para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ por la ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Luego podemos dar una fórmula explícita para $F_n(x)$. Usando la expansión explícita de los polinomios de Legendre E_n, se tiene que

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j}(-1)^{k+j}x^k\int_1^x t^{j-k-1}dt,$$

por lo tanto B_n lo obtenemos cuando $k = j$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 x^k, \tag{5.25}$$

y A_n lo obtenemos del resto

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j}(-1)^{k+j}\frac{x^k - x^j}{j-k}. \tag{5.26}$$

Obviamente $B_n(1)$ es un entero. Pero, necesitamos conocer $D_n(1)$ también. Ahora bien,

$$D_n(z) = -\int_0^1 \frac{A_n(z) - A_n(x)}{z - x}\log x dx + \int_0^1 \frac{B_n(z) - B_n(x)}{z - x}\log^2 x dx,$$

así, para $D_n(1)$ necesitamos por un lado

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(z) - B_n(x)}{z - x}\log^2 x dx &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x}\log^2 x dx\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2}{(j+1)^3},\end{aligned}$$

y por otra parte necesitamos también que

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1-x}\log x dx = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j} \frac{(-1)^{k+j}}{j-k}\int_0^1 \frac{x^k - x^j}{1-x}\log x dx.$$

Ahora,

$$\int_0^1 \frac{x^k - x^j}{1-x}\log x dx = H_k^{(2)} - H_j^{(2)},$$

donde $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^n 1/j^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} D_n(1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2}{(j+1)^2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j}(-1)^{k+j}\frac{H_k^{(2)} - H_j^{(2)}}{j-k}. \end{aligned}$$

ésto no es necesariamente un entero, pero si lo multiplicamos por d_n^3, donde d_n es el mínimo común múltiplo de 2, 3, …, n, entonces $d_n^3 D_n(1)$ si es un entero. Por lo tanto tomando $q_n = 2d_n^3 B_n(1)$ y $p_n = d_n^3 D_n(1)$, entonces

$$q_n\zeta(3) - p_n = d_n^3 \int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds.$$

Lo usaremos para ver que la parte de la derecha tiende a cero.
Pero usando la expresión

$$A_n(s) - B_n(s)\log s = \int_1^s E_n(s/y)E_n(y)\frac{dy}{y},$$

donde E_n son los polinomios de Legendre de grado n en $[0,1]$, vemos que cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds &= \int_0^1 \int_0^t \frac{\log s}{1-s}E_n(s/y)E_n(y)ds\frac{dy}{y} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy}E_n(x)E_n(y)dxdy, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se llega usando la sustitución $s = xy$. Ahora, usamos

$$\int_0^1 \frac{dv}{1-(1-u)v} = -\frac{\log u}{1-u}$$

para ver que

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{E_n(x)E_n(y)}{1-(1-xy)v}dxdydv.$$

Usando la fórmula de Rodrigues (5.19) e integrando por partes encontramos que

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}}dxdydv.$$

Para la integral sobre $v \in [0,1]$, usamos el cambio de variables

$$z = \frac{1-v}{1-(1-xy)v},$$

encontrando que

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dxdydv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-z)^n E_n(y)}{1-(1-xy)z} dxdydz,$$

entonces usando la fórmula de Rodrigues e integrando por partes se tiene que

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{[xyz(1-x)(1-y)(1-z)]^n}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dxdydz.$$

Cómo un ejercicio de cálculo, tenemos que

$$\max_{0\le x,y,z\le 1} \frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z} = (\sqrt{2}-1)^4,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds\right| &\le (\sqrt{2}-1)^{4n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dxdydz \\ &= (\sqrt{2}-1)^{4n} 2\zeta(3). \end{aligned}$$

Así

$$\limsup_{n\to\infty} |q_n\zeta(3) - p_n|^{1/n} \limsup_{n\to\infty} d_n^{3/n} \left|\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds\right|^{1/n} \le e^3(\sqrt{2}-1)^4$$

donde hemos usado el lema 5.2 en la última desigualdad. Observe que

$$e^3(\sqrt{2}-1)^4 = 0{,}591263\ldots < 1,$$

por lo tanto se tiene que $\zeta(3)$ es irracional usando el lema 5.1. □

5.4. La trascendencia de e

La aproximación racional simultanea de Hermite-Padé fue introducida por Hermite. El dió un ejemplo muy importante de un sistema completo de funciones para las cuales todos los índices relevantes (n,m) para la aproximación de tipo II cerca del orígen eran normales. Para un sistema $(f_1,\ldots,f_r)$ dados por series de potencias formales alrededor de $z=0$

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,j} z^k,$$

y para los multi-índices $n = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ y $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$, la aproximación de Hermite-Padé de tipo II (n,m) alrededor del orígen es de la forma

$$Q_n(z) f_j(z) - P_{m_j}(z) = O(z^{n_j+m_j+1}), \qquad z \to 0,$$

donde $Q_n(z)$ es un polinomio de grado $\le |n| = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ y P_{m_j}son polinomios de grado a lo más m_j. Son de especial ínteres los *índices de Mahler* para los cuales

$$n_1 + m_1 = n_2 + m_2 = \cdots = n_r + m_r = |n| + N, \qquad N \ge 0.$$

Un índice (n,m) es normal para un sistema $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ si el grado de Q_n es exactamente $|n|$ y cada polinomio P_{m_j} tiene grado m_j. Un sistema $(f_1, \ldots, f_r)$ es completo si todos los índices son de Mahler y son normales. Hermite consideró el sistema $(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x})$, donde λ_j son números complejos no nulos tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ cuando $i \neq j$, y probó que tales sistemas eran completos. De hecho, las aproximaciones racionales pueden darse explícitamente en términos de un polinomio

$$T(x) = x^N (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_r)^{n_r}$$

de grado $|n| + N$ con

$$Q_n(z) = z^{|n|+N+1} \int_0^\infty T(x) e^{-zx} dx$$

y

$$P_{m_j}(z) = e^{\lambda_j z} z^{|n|+N+1} \int_{\lambda_1}^\infty T(x) e^{-zx} dx = z^{|n|+N+1} \int_0^\infty T(x+\lambda_j) e^{-zy} dy.$$

Para ver que efectivamente éstos son polinomios, invocamos el resultado

$$\int_0^\infty x^k e^{-zx} dx = \frac{k!}{z^{k+1}}$$

Así que Q_n es un polinomio de grado $|n|$ y P_{m_j} un polinomio de grado $|n| + N - n_j = m_j$. Además

$$Q_n(z) e^{\lambda_j z} - P_{m_j} = e^{\lambda_j z} z^{|n|+N+1} \int_0^{\lambda_j} T(x) e^{-zx} dx = O(z^{|n|+N+1}).$$

Hermite usó este resultado para probar la trascendencia de e.

Teorema 5.3 : (Hermite, 1874) *El número real e es trascendente.*

Prueba: Supongamos que no lo es, entonces e es un número algebraico, lo cual significa que existe un entero positivo n y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0. \tag{5.27}$$

Podemos suponer que $a_0 \neq 0$. Consideremos el sistema de funciones $(e^z, e^{2z}, \ldots, e^{nz})$, entonces sabemos que este sistema es completo. Usaremos las aproximaciones de Hermite-Padé en torno al orígen para este sistema y lo evaluaremos en $z = 1$. De hecho, usaremos los números

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty t(x) e^{-x} dx, \\ M_k &= e^k \int_k^\infty t(x) e^{-x} dx, \\ \epsilon_k &= e^k \int_0^k t(x) e^{-x} dx, \end{aligned}$$

donde

$$t(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} [(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p,$$

con p un número primo, $p > n$ y p no divisor de a_0. Observe que $M_k + \epsilon_k = M e^k$. Si multiplicamos (5.27) por M entonces tenemos que

$$0 = M a_0 + (a_1 M_1 + a_2 M_2 + \cdots + e^n M_n) + (a_1 \epsilon_1 + a_2 \epsilon_2 + \cdots + a_n \epsilon_n). \tag{5.28}$$

Podemos desarrollar el polinomio t como

$$t(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left((-1)^{np}(n!)^p + \sum_{k=1}^{np} c_k x^k\right),$$

donde c_k son enteros. Además,

$$\begin{aligned} M &= \frac{(-1)^{np}(n!)^p}{(p-1)!}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx + \sum_{k=1}^{np}\frac{c_k}{(p-1)!}\int_0^\infty x^{k+p-1}e^{-x}dx \\ &= (-1)^{np}(n!)^p + \sum_{k=1}^{np} c_k \frac{(k+p-1)!}{(p-1)!}, \end{aligned}$$

y cada término en la suma para $k \geq 1$ es divisible por p, pero el término constante (para $k=0$) no lo es. Por lo tanto el entero Ma_0 no es divisible por p. De la misma forma, podemos de sarrollar el polinomio $t(x+k)$ para $1 \leq k \leq n$ como

$$t(x+k) = \frac{x^p}{(p-1)!}\sum_{\ell=0}^{np-1} c_{k,\ell}x^\ell$$

donde todos los $c_{k\ell}$ son enteros, así que

$$M_k = \int_0^\infty t(x+k)e^{-x}dx = \sum_{\ell=0}^{np-1} c_{k,\ell}\frac{(p+\ell)!}{(p-1)!},$$

y cada término en la suma ahora es divisible por p. Por lo tanto la suma $a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n$ es divisible por p. Luego podemos concluir ahora que el entero $Ma_0 + (a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n)$ no es divisible por p y por lo tanto no puede ser cero, queriendo esto decir que

$$|Ma_0 + (a_1M_1 + a_2M_2 + \cdots + a_nM_n)| \geq 1. \tag{5.29}$$

Por otra parte, podemos usar la estimación

$$|t(x)| \leq n^{np+p-1}/(p-1)!, \qquad 0 \leq x \leq n,$$

para ver que

$$|\epsilon_k| \leq e^k n^{np+p-1}/(p-1)!, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

y por lo tanto cada ϵ_k tiende a cero cuando p tiende a infinito. Esto, junto con (5.29) es una contradicción con (5.28). Así podemos concluir que e es trascendente. $\square$

5.5. La irracionalidad de $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$

Como ya hemos mencionado en el capítulo 2, sección 2.3, muchas funciones especiales importantes, en particular las funciones hipergeométricas, tienen q-extensiones, obtenidas generalmente por sustitución de los símbolos de Pochhammer $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ por sus q-análogos $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1})$. Donde

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} = (a)_n,$$

Generalmente se recupera la función especial original de su q-extensión haciendo tender $q \to 1$. Nuestro interés en este apartado es la q-extensión de la serie armónica siguiente

$$h_p(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k}, \quad 0 < q = \frac{1}{p} < 1, \tag{5.30}$$

y del logaritmo natural de 2

$$\ln_p(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^k}{1-q^k}, \qquad 0 < q = \frac{1}{p} < 1. \tag{5.31}$$

En 1948, Paul Erdös [15] probó que $h_2(1)$ era irracional. Peter Browein [9], [10] vió que $h_p(1)$ (y otros números similares) eran irracionales para cada entero $p > 1$ y tambien demostró la irracionalidad de $\ln_p(2)$ para cada entero $p > 1$. Él utilizó técnicas de aproximación de Padé y el análisis complejo para obtener una buena aproximación racional para $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$. Recientemente Amdeberhan y Zeilberger [2] encontraron q-WZ pares para encontrar aproximaciones racionales para $h_p(1)$ y $\ln(2)$, mejorando la cota superior de la medida de irracionalidad a 4.8=24/5. Aquí veremos que estas aproximaciones racionales están relacionadas con los q-polinomios pequeños de Legendre y por lo tanto volvemos a las aproximaciones de Padé. Podemos usar entonces algunos resultados de los q-polinomios pequeños de Legendre para probar la irracionalidad una vez más, pero con una mejor cota para la medida de irracionalidad para $h_p(1)$. La conexión con los q-polinomios pequeños de Legendre abren un camino para probar la irracionalidad de q-extensiones de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ en el espíritu de Apéry [4], usando q-polinomios ortogonales múltiples [27].

5.5.1. Las series q-armónicas

Supongamos que μ es una medida positiva sobre la recta real con un soporte infinito y para la cual existen todos sus momentos. Si $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ son polinomios ortogonales para μ, i.e., P_n son de grado n y

$$\int P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = 0, \qquad m \neq n,$$

y si Q_n son polinomios de grado $n-1$ dados por

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu(x), \tag{5.32}$$

entonces como ya hemos visto,

$$P_n(z) f(z) - Q_n(z) = \int \frac{P_n(x)}{z-x} d\mu(x), \qquad z \notin \mathrm{sop}(\mu). \tag{5.33}$$

Si desarrollamos $1/(z-x)$ entorno a $z=\infty$ como

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}} + \frac{x^n}{z^n}\frac{1}{z-x},$$

entonces por la ortogonalidad se tiene que

$$P_n(z)f(z) - Q_n(z) = \frac{1}{z^n}\int \frac{P_n(x)x^n}{z-x} d\mu(x) = \mathcal{O}(1/z^{n+1}).$$

Ésta es precisamente la forma (linealizada) de las condiciones de interpolación en torno a $z=\infty$ para la aproximación de Padé, así que $Q_n(z)/P_n(z)$ es la $\left[\frac{n-1}{n}\right]$ aproximación de Padé para $f(z)$ cerca de $z=\infty$.
Para los q-polinomios pequeños de Legendre la medida μ tiene como soporte

$$\{q^k, k=0,1,2,\dots\},$$

que es un conjunto acotado en $[0,1]$ con 0 como punto de acumulación. La medida viene dada por

$$\int g(x)d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(q^k)q^k.$$

La función de Stieltjes para esta medida es

$$f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{z-q^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{zp^k-1}, \quad z \notin \operatorname{sop}(\mu). \tag{5.34}$$

Necesitaremos esta función en p^n, donde ésta vale

$$f(p^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+k}-1} = h_p(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p^k-1}. \tag{5.35}$$

Por lo tanto si $p>1$ es un entero, luego $f(p^n)$ nos da $h_p(1)$ además de $\sum_{k=1}^{n-1} 1/(p^k-1)$, el cual es un número racional. Ahora usamos (5.33) para los q-polinomios pequeños de Legendre para $z=p^n$ encontrando

$$P_n(p^n|q)\left(h_p(1) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p^k-1}\right) - Q_n(p^n|q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n-q^k}q^k. \tag{5.36}$$

Nótese que (2.59) nos da

$$P_n(p^n|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{k(k-1)/2}, \tag{5.37}$$

el cual está cerca del b_n encontrado en [2], p.277 (su b_n corresponde a $P_n(p^{n+1}|q)$). Observe también que la construcción de Borwein (Lema 2 de [13]), usa $P_{n-1}(cp^{n+1}|q)$. Los números q-binómicos

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$$

son polinomios en p con coeficientes enteros, los cuales nos conducen de una manera fácil a la q-versión de las identidades del triángulo de Pascal

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p + p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_p + p^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p,$$

Por lo tanto si $p > 1$ es un entero, luego $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$ y $\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p$ son enteros. Esto significa que (5.37) nos lleva a que $P_n(p^n, q)$ es un entero. Además, como $p^n > 1$ y todos los ceros de $P_n(x|q)$ están en $[0,1]$, podemos concluir que $(-1)^n P_n(p^n|q)$ es positivo para todo n. La segunda cantidad importante en (5.36) es $Q_n(p^n|q)$. Estos q-polinomios pequeños de Legendre pueden calcularse explícitamente usando (5.32) y vienen dados por

$$Q_n(x|q) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_n(x|q) - P_n(q^j|q)}{x - q^j} q^j.$$

Usando (2.66) los podemos escribir como

$$Q_n(x|q) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(qx;q)_k - (q^{j+1};q)_k}{x - q^j} q^j.$$

Ahora usaremos que

$$\frac{(qx;q)_k - (qy;q)_k}{x-y} = -\sum_{\ell=1}^{k} q^{\ell} (qy;q)_{\ell-1} (q^{\ell+1}x;q)_{k-\ell},$$

la cual se puede probar por inducción; entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} Q_n(x|q) &= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \\ &\quad \times \sum_{\ell=1}^{k} q^{\ell} (q^{\ell+1}x;q)_{k-\ell} \sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^{j+1};q)_{\ell-1} \end{aligned}$$

Usando las series q-binomiales de (2.64) podemos calcular los momentos modificados

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^{j+1};q)_{\ell-1} &= (q;q)_{\ell-1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{(q^{\ell};q)_j}{(q;q)_j} \\ &= \frac{(q;q)_{\ell-1}(q^{\ell+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{1-q^{\ell}} \end{aligned}$$

así que

$$Q_n(x|q) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(q^{\ell+1}x;q)_{k-\ell}}{p^{\ell}-1}. \tag{5.38}$$

Evaluandolo en $x = p^n$ y usando que

$$(q^{\ell+1}p^n;q)_{k-\ell} = (p^{n-k};p)_{k-\ell},$$

nos da que

$$Q_n(p^n|q) = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{(p^{n-k};p)_{k-\ell}}{p^\ell - 1}. \tag{5.39}$$

Todos los términos de la suma de $Q_n(p^n|q)$ ahora son enteros, excepto los que tienen como denominador $p^\ell - 1$. Para obtener un entero, necesitaremos multiplicar todo por un múltiplo de $p^\ell - 1$ para $\ell = 1, 2, \ldots, n$. La elección óptima debería ser tomar el mínimo común múltiplo de tales números

$$d_p(n) = mcm(p-1, p^2-1, p^3-1, \ldots, p^n-1), \tag{5.40}$$

pero desafortunadamente no se sabe mucho sobre esta cantidad. Otra posibilidad es tomar $(-1)^n(p,p)_n$ pero este número es demasiado grande; de hecho crece como $p^{n(n+1)/2}$ cuando $n \to \infty$. Un factor útil es

$$\hat{d}_p(n) = \prod_{k=[n/2]+1}^{n}(p^k - 1) = \frac{(-1)^n(p,p)_n}{(-1)^{[n/2]}(p,p)_{[n/2]}} = (-1)^{n-[n/2]}\begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_p (p;p)_{[(n+1)/2]}, \tag{5.41}$$

donde $[n/2]$ es la parte entera de $n/2$. En efecto, si $k > [n/2]$ entonces $p^k - 1$ está en el producto definido $\hat{d}_p(n)$ y por lo tanto lo divide. Si $k \leq [n/2]$ entonces $p^k - 1$ divide a $(p;p)_{[(n+1)/2]}$ y por lo tanto tambien divide a $\hat{d}_p(n)$ ya que el coeficiente q-binomial es un entero. Nótese que $\hat{d}_p(n)$ crece como $p^{3n^2/8}$ cuando $n \to \infty$.
Llegamos más lejos aún, encontramos que los números

$$b_n = \hat{d}_p(n)P_n(p^n|q) \tag{5.42}$$

$$a_n = \hat{d}_p(n)Q_n(p^n|q) + b_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p^k - 1}. \tag{5.43}$$

son enteros y

$$b_n h_p(1) - a_n = \hat{d}_p(n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k. \tag{5.44}$$

Veamos ahora que $b_n h_p(1) - a_n \neq 0$ para todo n y

$$\lim_{n\to\infty} b_n h_p(1) - a_n = 0,$$

así por el lema 5.1 tendremos la irracionalidad de $h_p(1)$. Primero notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k = \frac{1}{P_n(p^n|q)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n(q^k|q)P_n(p^n|q)}{p^n - q^k}q^k.$$

Si sumamos y restamos $P_n(q^k|q)$ en la suma, entonces tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k = \frac{1}{P_n(p^n|q)}\sum_{k=0}^{\infty}P_n(q^k|q)\frac{P_n(p^n|q) - P_n(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k + \frac{1}{P_n(p^n|q)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k.$$

La primera suma de la derecha se anula debido a la ortogonalidad, así que

$$b_n h_p(1) - a_n = \frac{\hat{d}_p(n)}{P_n(p^n|q)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k. \tag{5.45}$$

Todos los términos en la suma son ahora positivos, y $(-1)P_n(p^n|q)$ es positivo para todo n, así podemos concluir que

$$(-1)^n(b_n h_p(1) - a_n) > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Veamos ahora que esta cantidad converge a cero. Claramente $p^n - 1 \leq p^n - q^k \leq p^n$ así que

$$\frac{1}{p^n}\sum_{k=0}^{\infty} P_n^2(q^k|q)q^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k \leq \frac{1}{p^n - 1}\sum_{k=0}^{\infty} P_n^2(q^k|q)q^k.$$

Ahora podemos utilizar la norma del q-polinomio pequeño de Legendre (2.54) para encontrar

$$\frac{p}{p^{2n+1} - 1} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k}q^k \leq \frac{p^{n+1}}{(p^n - 1)(p^{2n+1} - 1)}. \tag{5.46}$$

Lo que nos queda es demostrar el comportamiento asintótico de $P_n(p^n|q)$ cuando $n \to \infty$. Para esto podemos usar un teorema muy general para secuencias de polinomios con ceros uniformementes acotados.

Lema 5.3 : *Supongamos que P_n es una secuencia de polinomios mónicos de grado n y que los ceros $x_{j,n}$ $(1 \leq j \leq n)$ de P_n son tales que $|x_{j,n}| \leq M$, con M independiente de n. Entonces se tiene que para $|x| > 1$ y cada $c \in \mathbb{C}$*

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(cx^n)|^{1/n^2} = |x|. \tag{5.47}$$

Prueba: La factorización del polinomio P_n viene dada por

$$|P_n(x)| = \prod_{j=1}^{n} |x - x_{j,n}|.$$

Y tenemos la siguiente acotación

$$||x| - M| \leq |x - x_{j,n}| \leq |x| + M,$$

por lo tanto

$$||cx^n| - M|^n \leq |P_n(cx^n)| \leq (|cx^n| + M)^n.$$

Para un n suficientemente grande se tiene fácilmente que

$$|x|\left(|c| - \frac{M}{|x|^n}\right)^{1/n} \leq |P_n(cx^n)|^{1/n^2} \leq |x|\left(|c| + \frac{M}{|x|^n}\right)^{1/n},$$

con lo que el resultado queda demostrado.

□

Observe que podríamos dejar que M creciese con n exponencialmente. Para los q-polinomios pequeños de Legendre, sus ceros están en $[0, 1]$ así que podemos usar el lemma con $M = 1$. El coeficiente lider κ_n de $P_n(x|q)$ es, por (2.59), igual a $\kappa_n = (-1)^n \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_p p^{-n(n+1)/2}$, deduciendo que

$$\lim_{n\to\infty} |\kappa_n|^{1/n^2} = \sqrt{p},$$

y por lo tanto el lema 2 nos dice que si $|x| > 1$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(cx^n|q)|^{1/n^2} = \sqrt{p}\ |x|. \tag{5.48}$$

Teorema 5.4 : *Supongamos que $p > 1$ es un entero. Sean a_n y b_n como en (5.42)-(5.43), entonces $a_n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n b_n \in \mathbb{N}$, y $(-1)^n(b_n h_p(1) - a_n) > 0$ para $n > 1$. Además*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = p^{-9/8} < 1,$$

lo cual implica que $h_p(1)$ es irracional con medida de irracionalidad r tal que $1{,}6 \leq r \leq 2{,}666\ldots$.

Prueba: Si tomamos $x = p$ y $c = 1$ en (5.48) entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(p^n|q)|^{1/n^2} = p^{3/2},$$

así que para el entero b_n de (5.42) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n^2} = p^{15/8}.$$

Observe que b_n tiene el mismo signo que $P_n(p^n|q)$ el cual es $(-1)^n$. Además (5.45) y (5.46) nos muestran que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} \hat{d}_p(n)^{1/n^2}}{\lim_{n\to\infty} |P_n(p^n|q)|^{1/n^2}} = p^{-9/8}.$$

La irracionalidad ahora se tiene por el lema 5.1. Obsérvese que esto da una aproximación por racionales a_n/b_n para $h_p(1)$ satisfaciendo

$$\left| h_p(1) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{b_n p^{(9/8-\epsilon)n^2}} \right)$$

para cada $\epsilon > 0$. Ahora $b_n = p^{15n^2/8 + o(n^2)}$, por lo tanto

$$\left| h_p(1) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{b_n^{1+3/5-\epsilon}} \right), \qquad \forall \epsilon > 0,$$

lo cual nos da cotas para la medida de la irracionalidad $1 + 3/5 \leq r \leq 1 + 5/3$.

□

La cota superior para la medida de irracionalidad es mejor que la dada en [2] (4.8). Una mejora se consigue reemplazando $\hat{d}_p(n)$ por $d_p(n)$ dada en (5.40), pero entonces se necesita conocer una cota superior para $\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2}$. Claramente

$$\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \hat{d}_p(n)^{1/n^2} = p^{3/8},$$

pero es posible que $\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2} = p^c$ para cierto $c < 3/8$. Este es un problema abierto de interés independiente. Este problema consiste en dado $p \to 1$ ver el comportamiento del mínimo común múltiplo d_n de los enteros $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para los que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} = e,$$

el cual es equivalente al teorema de los números primos.

5.5.2. El q-análogo del logaritmo de 2

Ahora veremos que un análisis similar también prueba la irracionalidad de $\ln_p(2)$ para cada entero $p > 1$. Antes de nada reescribiremos $\ln_p(2)$ usando series geométricas

$$\ln_p(2) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{q^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^{jk}.$$

El teorema de Fubini nos permite cambiar el orden de los sumatorios siempre que $0 < q < 1$ y nos da que

$$\begin{aligned} \ln_p(2) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k(j+1)} \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j+1}}{1+q^{j+1}} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si podemos evaluar la función de Stieltjes (5.34) para $z = -p^n$ entonces tendremos que

$$f(-p^n) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+k}+1} = \ln_p(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k+1},$$

así que $f(-p^n)$ nos da $\ln_p(2)$ junto con el número racional $\sum_{k=1}^{n-1} 1/(p^k+1)$. Podemos proceder como en la sección anterior y evaluar (5.33) para los q-polinomios pequeños de Legendre en $z = -p^n$ para encontrar

$$P_n(-p^n|q)\left(\ln_p(2) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{p^k+1}\right) - Q_n(-p^n|q) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_n(q^k|q)}{p^n+q^k} q^k.$$

Aquí podemos usar (2.59) para ver que

$$P_n(-p^n|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(-p^{n-k};p)_{k-\ell}}{p^\ell - 1},$$

así que $\hat{d}_p(n) Q_n(-p^n|q)$ es un entero. Ahora tenemos la cantidad adicional

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k+1}$$

y para hacer que éste sea un entero deberíamos multiplicarlo por un múltiplo de $p^k + 1$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Nosotros usaremos $(-1)^n(-1;p)_n$ el cual crece como $p^{n^2/2}$. Así, si elegimos

$$b_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) P_n(-p^n|q), \tag{5.35}$$

$$a_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) Q_n(-p^n|q) - b_n \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p^k+1} \tag{5.36}$$

entonces a_n y b_n son enteros y

$$b_n \ln_p(2) - a_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k. \tag{5.37}$$

Teorema 5.5 : *Supongamos que $p > 1$ es un entero. Sean (a_n) y b_n como los dados en (5.35)-(5.36), entonces $a_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{N}$, y $b_n \ln_p(2) - a_n < 0$. Además*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n \ln_p(2) - a_n|^{1/n^2} = p^{-5/8} < 1,$$

así $\ln_p(2)$ es irracional y su medida de irracionalidad satisface

$$1{,}263\cdots \leq r(\ln_p(2)) \leq 4{,}8.$$

Prueba: Usando $c = 1$ y $x = p$ en (5.48), entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{1/n^2} = p^{19/8}.$$

Además, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k = \frac{1}{P_n(-p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n^2(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k$$

y $p^n \leq p^n + q^j \leq p^n + 1$ para cada j, que combinado con (5.37) implica

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n)}{P_n(-p^n|q)} \frac{p^{n+1}}{(p^n+1)(p^{2n+1}-1)} &\leq -(b_n \ln_p(2) - a_n) \\ &\leq \frac{(-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n)}{P_n(-p^n|q)} \frac{p}{p^{2n+1}-1}. \end{aligned}$$

A través de esto podemos encontrar los comportamientos asintóticos necesitados y la irracionalidad y entonces aplicaremos el lema 1. Observe que $b_n = p^{19n^2/8 + o(n^2)}$ y

$$|\ln_p(2) - \frac{a_n}{b_n}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{b_n^{1+5/19-\epsilon}}\right), \qquad \forall \epsilon > 0,$$

lo cual nos da cotas para la medida de irracionalidad $1 + 5/19 \leq r \leq 1 + 19/5$.

□

La cota superior para la medida de irracionalidad es la misma que la obtenida en [2]. Ésta puede mejorarse reemplazando $(-1)^n(-1;p)_n$ por el mínimo común múltiplo de $p^k + 1$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y $\hat{d}_p(n)$ por el mínimo común mútiplo de $p^k - 1$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, se puede encontrar el comportamiento asintótico de las raíz n^2-ésima de estas cantidades.

Referencias

[1] R. Álvarez Nodarse, *Polinomios Hipergeométricos y q-Polinomios*, Monografía de la Acad. Cienc. de Zaragoza, 1999.

[2] T. Amdeberhan, D. Zeilberger, *q-Apéry irrationality proofs by q-WZ pairs.* Adv. Appl. Math. **20**, 1998, p.275-283.

[3] M.A. Angelesco, *Sur deux extensions des fractions continues algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris **18**, 1919, p.262-263.

[4] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Astérisque **61**, 1979, p.11-13.

[5] N.M. Atakishiyev, M. Rahman y S.K. Suslov, *On classicla orthogonal polynomials.* Constr. Approx. **11**, 1995, p.181-226.

[6] G. A. Baker, JR., P. Graves-Morris, *Padé Approximants.* Cambridge University Press, 1996.

[7] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Bull. London Math. Soc **11**, 1979, p.268-272.

[8] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme.* Math. Zeit. **29**, 1929, p.730-736.

[9] P. Borwein, *On the irrationality of* $\sum \frac{1}{q^n + r}$. Number Theory **37**, 1991, p.253-259.

[10] P. Borwein, *On the irrationality of certain series.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **112**, 1992, p.141-146.

[11] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM - A Study in Analitic Number Theory and Computational Complexity.* Wiley, New York, 1987.

[12] P. B. Borwein, W. Dykshoorn, T. Erdélyi, J. Zhang, *Orthogonality and irrationality,* manuscript.

[13] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomials Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1995.

[14] C. Brezinski, *"Padé-Type Aproximation and General Orthogonal Polynomials".* Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Stuttgart, 1980.

[15] P. Erdös, *On arithmetical propierties of Lambert series.* J. Indiana Math. Soc. **12**, 1948, p.63-66.

[16] G. Gasper y M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series.* Encyclopedia of Mathematics and its Aplications **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[17] A.A. Gonchar, E.A. Rakhmanov, and V.N. Sorokin, *Hermite–Padé Approximants for systems of Markov–type functions*, Sbornik Mathematics **188**:5, 1997, p.33–58.

[18] G.H. Hardi and E.M. Wright, *Introduction to the Number Theory.* Oxford University Press (5th Edition), Oxford, 1979.

[19] R. Koekoek y H.G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **24** (3), 1993, p.768-782.

[20] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hipergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Faculty of technical Mathematics and Informatics Report 98-17, Technical University. 1998. Available at
ftp://ftp.twi.tudelf.nl/TWI/publications/tech-reports/1998/DUT-TWI-98-17.ps.gz

[21] Tecnical Report *Guide to Standart MATHEMATICA Packages. Version 2.2.*
(Third Edition 1993 ©by Wolfram Research).

[22] A.F. Nikiforov, S.K. Suslov y V.B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Springer Series in Computational Physics.* Springer-Verlag, Berlín, 1991. (Edición en ruso, Nauka, Moscú, 1985).

[23] A.F. Nikiforov y V.B. Uvarov, *Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification.* Integral Transform. Spec. Funct. **1**, 1993, p.438-462.

[24] A.F. Nikiforov y V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Phisycs.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

[25] E.M. Nikishin, *On simultaneous Padé approximants*, Mat. Sb. **113**, 1980, p.499-519. (Math. USSR Sb. **41**, 1982, p.409-426).

[26] E.M. Nikishin, V.N. Sorokin, *Rational Aproximations and Orthogonality.*
Amer.Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[27] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomilas, irrationality and trascendence*, Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (Columbia, MO, 1998), Contemp. Math., 236, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p.325–342.

[28] W. Van Assche, *Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series*, 1999. Article.

[29] W. Van Assche, *Special Functions and Differential Equation.* (K. Srinivasa et al.eds.) Allied Publishers, New Delhi, 1998, p.336-355.