

Polinomios ortogonales respecto a medidas q -discretas. Aplicaciones

Roberto S. Costas Santos

Polinomios ortogonales respecto a medidas q -discretas. Aplicaciones

Memoria que presenta para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Roberto S. Costas Santos

Dirigida por el profesor

Renato Álvarez Nodarse

Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

2007



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**POLINOMIOS ORTOGONALES RESPECTO A
MEDIDAS q -DISCRETAS. APLICACIONES**

Autor: Roberto S. Costas Santos

Director: Renato Álvarez Nodarse

Leganés, Febrero 2007

A mi familia

Agradecimientos

Antes que a nadie, debo agradecer profundamente a mi tutor y director de tesis, Renato Álvarez Nodarse, por aceptarme como su alumno de doctorado y permitir introducirme en el mundo de la investigación. Gracias por valorar mi esfuerzo y mi trabajo de forma incondicional. También quisiera agradecerle su amistad la cual espero no haber explotado en exceso.

En segundo lugar, quisiera agradecer a D. Francisco Marcellán, a D. Guillermo López, y a J. Arvesú, además de todos los miembros del grupo de investigación al que pertenezco, todo su apoyo por permitirme mejorar como investigador y como persona. También quisiera agradecer al departamento de matemáticas por permitirme completar este trabajo ofreciéndome un hueco en él.

También quiero agradecer a mis compañeros de despacho, Alfredo Deaño y Luis Lafuente, con los que espero mantener la amistad que cultivamos durante estos últimos años, por todos esos estupendos momentos que disfrutamos juntos. Igualmente quisiera agradecer, por su complicidad para conmigo, a Angeles, Nona, Maribel, Guido, Mayte, Raúl, y otros tantos los cuales omitiré, con los que pasé muy buenos ratos y con los que espero conservar esa amistad que en algún momento me ofrecieron.

Por último, quisiera agradecer de una forma muy especial a toda mi familia su interés por el desarrollo de este trabajo y por su complicidad. Gracias por apoyarme en todo momento.

R.S.C.S.
Leganés, Febrero de 2007

Este trabajo ha sido posible, en parte, gracias al proyecto de la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia BFM2003-06335-C03-02, y especialmente gracias a la beca de formación de Doctores concedida por el departamento de matemáticas de la UC3M.

Estructura de la Memoria y cuestiones de estilo.

La memoria se estructura en capítulos y éstos, a su vez, en secciones, subsecciones y subsecciones de éstas – que se verán marcadas por el símbolo $\square$ –, siendo siempre el texto que precede a la primera sección una introducción, donde se describe el contenido del estudio e incluyen las referencias básicas.

En el texto se evitará escribir caracteres en cursiva, la cual se empleará para voces en lengua extranjera o enfatizar una frase. Se usarán los caracteres en negrita no sólo para indicar capítulos, secciones, teoremas, lemas, proposiciones, tablas y demostraciones, sino también para los operadores que se considerarán a lo largo de esta memoria – los cuales, en ciertas ocasiones, aparecerán en estilo griego –.

Dada la gran cantidad de nomenclatura contenida en el texto y a fin de evitar confusiones, se han empleado las posibilidades ofrecidas por $\text{\LaTeX}$ para realizar una estricta separación, según sea el concepto que se asocia a la notación. Por ejemplo, los conjuntos se denotan con las letras huecas: $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, etc; los funcionales en negrita: $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, etc, y los polinomios con minúsculas: $p(x)$, salvo los clásicos y sus generalizaciones.

Por otro lado, cuando se diga $p(s)$ uno está abusando de la notación queriendo decir $p(x(s))$. Mientras que si se escribe $p(x_k(s))$ donde $x_k(s) = x(s + \frac{k}{2})$ siendo $k \in \mathbb{Z}$, uno se está refiriendo al cambio de variable usual $x \rightarrow x_k(s)$ aplicado sobre el polinomio p , diciéndose en este caso que p es un polinomio en x_k del grado el que corresponda.

Además, debido a la gran cantidad de fórmulas que aparecen en esta memoria, habrá ocasiones en la que el mismo símbolo indique cosas distintas en diferentes capítulos, de ahí que, aunque en estos casos se indicará, el lector deberá distinguirlos según el contexto en las que se encuentren, por ejemplo, A , Λ , $\mathfrak{H}$, etc.

La numeración de los resultados o expresiones está de acuerdo con su ubicación en el texto. Así, la Proposición 3.2.4 indica la cuarta posición de la sección segunda del tercer capítulo, y la fórmula (3.22) indica la vigésimosegunda expresión del capítulo tercero.

También, conviene destacar que las fórmulas centradas, cuando ocupan más de un renglón, y un renglón es la continuación del anterior, se pone el signo matemático en el último al comienzo de la línea (ya sea, $+$, $-$, $\times$, etc.), por ejemplo:

$$\begin{aligned} & [\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s)] \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} = \frac{\gamma_n \lambda_{2n}}{[2n]_q} P_{n-1}(s) \\ & + \left[\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \lambda_n \nabla x_1(s) - \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) \right] P_n(s). \end{aligned}$$

Referente a la bibliografía, se intentará citar las fuentes originales. Para distinguir entre libros y artículos pondremos el título de los primeros en *cursiva*.

Por último, en la medida de lo posible se tratará de estructurar este trabajo según su componente histórica, además se tratará de no introducir más notación de la estrictamente necesaria.

Índice general

I	Los polinomios ortogonales clásicos	1
1.	Introducción	3
1.1.	Breve introducción histórica	3
1.2.	Importancia del tema	5
1.3.	Resultados más relevantes	7
2.	Preliminares	9
2.1.	Los espacios $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$	10
2.2.	La propiedad de ortogonalidad	11
2.3.	La relación de recurrencia a tres términos. Algunas consecuencias	13
2.4.	Los Teoremas de caracterización	14
2.4.1.	Funciones hipergeométricas	16
2.5.	Generalidades sobre el q -cálculo	17
2.5.1.	Diferenciación e integración	17
2.6.	Preliminares relativos a los q -polinomios	19
3.	Un enfoque general de las familias clásicas	25
3.1.	Conexión con la Teoría de operadores	25
3.2.	El operador de Rodrigues	28
3.3.	El Teorema de caracterización para los q -polinomios	30
3.4.	Ejemplos	41
3.4.1.	Los polinomios de Askey-Wilson	41
3.4.2.	Los q -polinomios Racah $u_n^{(\alpha, \beta)}(x(s), a, b)$	42
II	Polinomios en redes no uniformes: Los q-polinomios	45
4.	Los métodos de Factorización	47
4.1.	Introducción	47
4.1.1.	Conexión con la teoría de grupos y las álgebras de Hopf	48
4.2.	Las funciones normalizadas	49
4.3.	El método de factorización de tipo Infeld & Hull	50
4.3.1.	Aplicación a ciertas funciones q -ortogonales normalizadas	54
4.4.	El método de factorización clásico	59
4.4.1.	Introducción y preliminares	59
4.4.2.	Los operadores de la factorización	59

4.4.3.	El álgebra dinámica	62
4.4.4.	Ejemplos	66
4.5.	El álgebra dinámica para los polinomios Δ -clásicos	73
4.5.1.	Preliminares: los polinomios Δ -clásicos	73
4.5.2.	Factorización de la ecuación en diferencias	74
4.5.3.	El álgebra dinámica para los polinomios de Charlier	75
4.5.4.	El álgebra dinámica para los polinomios de Meixner y Kravchuk	77
4.5.5.	El álgebra de simetrías $\text{Sp}(2, \mathfrak{R})$	80
4.5.6.	Las funciones de Meixner	80
4.5.7.	El álgebra de simetrías $\text{so}(3)$	82
4.5.8.	Las funciones de Kravchuk	83
5.	Un q-análogo de los polinomios de Racah y el álgebra cuántica $SU_q(2)$	85
5.1.	Introducción	85
5.1.1.	Los q -polinomios de Racah $u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$	86
5.1.2.	La propiedad de ortogonalidad y la norma d_n	86
5.1.3.	La representación hipergeométrica	88
5.1.4.	La RRTT y las fórmulas de diferenciación	89
5.1.5.	La dualidad de los q -polinomios de Racah	90
5.2.	Los q -polinomios de Racah $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$	94
5.2.1.	La representación hipergeométrica	94
5.2.2.	Las fórmulas de diferenciación	95
5.2.3.	El conjunto dual de $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$	96
5.3.	Conexión con los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$	97
5.3.1.	Los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$	97
5.4.	Los $6j$ -símbolos y los q -polinomios de Racah	99
5.5.	Los $6j$ -símbolos y los q -polinomios alternativos de Racah $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$	103
5.6.	Conexión entre $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$ y $u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$	104
6.	Los q-polinomios semiclásicos	107
6.1.	Introducción	107
6.1.1.	Los polinomios tipo Krall	108
6.1.2.	Las relaciones de estructura de las familias semiclásicas	109
6.2.	Relaciones límite entre los q -polinomios tipo Krall	110
6.2.1.	Preliminares	110
6.2.2.	Ejemplos	111
6.2.3.	Los q -polinomios tipo Krall	114
6.2.4.	Ejemplo con dos masas: Los q -polinomios grandes de Jacobi tipo Krall	115
6.2.5.	Ejemplos con una masa	117
6.2.6.	Algunas propiedades algebraicas de $\tilde{P}_n^A$	118
6.2.7.	Las relaciones límite entre los q -polinomios tipo Krall	120
6.3.	Segunda relación de estructura para los q -polinomios semiclásicos	122
6.3.1.	Breve introducción	122
6.3.2.	Preliminares y notación	124
6.3.3.	Resultados principales	125
6.3.4.	Primera caracterización de los q -polinomios semiclásicos	130
6.3.5.	Segunda caracterización de los q -polinomios semiclásicos	132
6.3.6.	La red uniforme $x(s) = s$	136
6.3.7.	Ejemplos	137

III Conclusiones y problemas abiertos	143
7. Conclusiones y problemas abiertos	145
7.1. Conclusiones	145
7.2. Problemas abiertos	146
IV Apéndices	147
A. Los esquemas de Askey y Hahn	149
Referencias	161



Los polinomios ortogonales clásicos

Introducción

1.1. Breve introducción histórica

La Teoría de funciones especiales es bien conocida por su importancia dentro de la Física-Matemática y, más concretamente, la de los polinomios ortogonales por su aplicación en las más diversas áreas de la ciencia actual. De hecho, el estudio de forma sistemática de tales funciones comienza a finales del siglo XVIII cuando se trataban de resolver problemas relativos a la mecánica celeste. Estas funciones son solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \tilde{\tau}(x) \frac{d}{dx} y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.1)$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios de grado a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante.

La Teoría de polinomios ortogonales, además de estar estrechamente relacionada con las ecuaciones diferenciales, también está vinculada con la Teoría de aproximación y la de fracciones continuas, es más, la conexión con esta última dan lugar al nacimiento de la Teoría general sobre polinomios ortogonales.

Quizás los trabajos de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856-1894) sobre fracciones continuas permiten ver de una manera clara dicha relación con los polinomios ortogonales. Más concretamente, Stieltjes en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues* [134], publicado póstumamente, desarrolló la Teoría general de las S -fracciones. Stieltjes probó que bajo ciertas condiciones sobre sus parámetros, la sucesión de denominadores, $\{p_n\}_{n \geq 0}$, de dichas fracciones formaban una sucesión de polinomios ortogonales (SPO), es decir,

- $\text{grd } p_n = n$,
- $\int_0^\infty p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = \delta_{n,m}$, $n, m = 0, 1, \dots$, donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker¹ y μ es una medida positiva soportada en $[0, +\infty)$.

Además de los trabajos de Stieltjes, se deben destacar también los realizados por el matemático ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev, el cual estudió una gran variedad de problemas relacionados con

¹ $\delta_{n,m}$ vale 1 si $n = m$ y 0 si $n \neq m$.

los polinomios ortogonales, llegando a ellos al tratar de resolver ciertos problemas aplicados.

De ahí que tanto a Stieltjes como a Chebyshev se les consideren los padres de la Teoría de polinomios ortogonales que estaba por llegar a principios del siglo XX quedando consolidada en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegő [135].

Dentro de la gran familia que forman los polinomios ortogonales (respecto a medidas soportadas sobre el eje real) se encuentran los polinomios ortogonales clásicos estándar (Hermite, Laguerre y Jacobi) los cuales satisfacen, según probó S. Bochner [49] en 1929, una ecuación diferencial del tipo (3.1).

Los teoremas de caracterización indican las principales propiedades que caracterizan a las familias clásicas. Una de sus versiones más conocidas, y a su vez de la más antiguas, se debe a Sonin la cual consiste en definir los polinomios clásicos como los únicos polinomios ortogonales que satisfacen la propiedad que sus derivadas, $\{P'_n\}_{n \geq 0}$, también son ortogonales, demostrando que los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite son clásicos.

Dicha propiedad, que fue redescubierta por W. Hahn en 1935, también recuperó los polinomios de Bessel² no considerados por Sonin.

Una extensión “evidente” de los polinomios clásicos estándar se debe a H. L. Krall quien en 1938 estudió el problema de determinación de soluciones polinómicas de una ecuación diferencial de orden $2n$ ($n > 1$) encontrando condiciones necesarias y suficientes que debían satisfacer dichas soluciones. En 1940 clasificó las ecuaciones de cuarto orden con soluciones polinómicas [92]. En 1978, A. M. Krall [91] estudió estos nuevos polinomios (no clásicos) – los cuales son ortogonales respecto a medidas obtenidas a partir de las clásicas mediante la adición de una o dos masas de Dirac – cuyo estudio inició las investigaciones en un nuevo campo de las funciones especiales: los polinomios semiclásicos [72, 105], el cual se encuentra en pleno desarrollo en la actualidad. Más detalles se pueden encontrar en [21] y [22] y las referencias contenidas en éstas.

Volviendo al marco de los polinomios ortogonales clásicos, hay dos grandes conjuntos de polinomios ortogonales clásicos que surgen al discretizar la ecuación diferencial (1.1) las cuales serán descritas con algo más de detalle en el capítulo 3.

El primero consiste en discretizar (1.1) considerando una red uniforme, aproximando las derivadas de primer y segundo orden adecuadamente, obteniéndose la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$\sigma(s)\Delta\nabla y(s) + \tau(s)\Delta y(s) + \lambda y(s) = 0, \quad (1.2)$$

donde $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(s)$, $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, λ es una constante, y Δ y ∇ son los operadores en diferencias finitas progresivas y regresivas, respectivamente, con

$$\Delta f(s) = f(s+1) - f(s), \quad y \quad \nabla f(s) = f(s) - f(s-1).$$

El segundo consiste en discretizar la ecuación (1.1) considerando una red no uniforme obteniéndose la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (1.3)$$

donde $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2}\tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})$, $\tau(s) = \tilde{\tau}(x(s))$, y λ es una constante.

Esta última forma de discretizar la ecuación (1.1) da lugar a la Teoría de los q -polinomios la cual ha sido desarrollada por un sinnúmero de autores destacando los trabajos de R. Askey, J. A. Wilson, T. H. Koornwinder, T. S. Chihara, A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, N. M. Atakishiev, S. K. Suslov,

²Los polinomios de Bessel, que son ortogonales respecto a una medida soportada sobre la circunferencia unidad $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, aunque fueron considerados por diversos matemáticos (e.g. Burchall y Chaundy en 1931 [53]), fueron H. L. Krall y O. Frink quienes los “presentaron” formalmente en 1949 en y les dieron su nombre por su relación con las funciones de Bessel.

entre otros. Véase, por ejemplo, [32, 40, 65, 85, 89, 115].

Más detalles sobre la historia de los polinomios ortogonales y las funciones especiales se pueden encontrar, entre otros, en [8, 9, 55, 65, 66, 117, 135].

1.2. Importancia del tema

La Teoría de funciones especiales y, más concretamente, la Teoría de polinomios ortogonales constituyen unas de las fuentes más apreciadas por la cantidad de aplicaciones en la matemática y en la física actual con la que éstas aparecen relacionadas. Entre ellas se encuentra la Teoría de números, el Análisis numérico, la Teoría de operadores, la Teoría de representación de grupos y la Mecánica cuántica.

Dentro de la variedad de problemas que se pueden encontrar relacionados con dichas teorías, considérese el siguiente problema que está íntimamente vinculado con uno que se desarrollará en esta memoria y que, a su vez, está relacionado con la Teoría de operadores.

Construir el álgebra de simetrías dinámica para el oscilador armónico, el cual viene definido en la mecánica cuántica no relativista por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} := -\frac{\hbar\omega}{2} \left(\xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) = \hbar\omega \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.4)$$

donde $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$ es la coordenada adimensional, $\mathbf{N}$ es el operador número de partículas,

$$\mathbf{N} := \mathbf{a}^\dagger \circ \mathbf{a},$$

y los operadores creación y destrucción se definen como

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right), \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right),$$

los cuales satisfacen la relación de conmutación

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] := \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}^\dagger \circ \mathbf{a} = I. \quad (1.5)$$

Obsérvese que en el caso del oscilador armónico (1.4) no hay mucha diferencia entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ y el operador $\mathbf{N}$. Así, $\mathbf{N}$ satisface las mismas relaciones de conmutación (1.5) con los operadores creación y destrucción $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$.

La Teoría de simetrías dinámicas [45, 100] está basada en estudiar bajo qué circunstancias se puede construir, teniendo en cuenta los operadores relacionados con un sistema físico, ciertas álgebras de Lie que no sólo incluyan al Hamiltoniano y los operadores de simetría sino también a los operadores creación y destrucción que, en general, no conmutan con el Hamiltoniano.

Definición 1.2.1. Se dice que $\mathbf{a}$ es un operador creación (resp. $\mathbf{b}$ es un operador destrucción) si existen una sucesión de autofunciones, $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, asociadas al Hamiltoniano $\mathcal{H}$, y una sucesión de números complejos, $\{u_n\}_{n \geq 0}$, (resp. $\{d_n\}_{n \geq 0}$) tales que

$$\mathbf{a}[\varphi_n] = u_n \varphi_{n+1}, \quad (\text{resp. } \mathbf{b}[\varphi_n] = d_n \varphi_{n-1}).$$

Además, el Hamiltoniano $\mathcal{H}$, los operadores $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^\dagger$, y el operador identidad, I , forman un Álgebra de Lie cerrada, lo cual permite encontrar el espectro de $\mathcal{H}$ y da, por definición, el grupo de simetrías dinámico del oscilador [78].

Teniendo en cuenta esto, las autofunciones independientes del Hamiltoniano forman una base de

una representación irreducible de la correspondiente Álgebra de Lie dinámica.

En este caso se conoce la solución del problema planteado anteriormente. Una vez que se ha factorizado el Hamiltoniano (o, equivalentemente, el operador $\mathbf{N}$) en términos de los operadores creación $\mathbf{a}^\dagger$ y destrucción $\mathbf{a}$, uno puede construir explícitamente el álgebra de Lie cerrada $su(1, 1)$ con los generadores

$$K_0 := \frac{1}{2\hbar\omega}\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\right), \quad K_+ := \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger)^2, \quad K_- := \frac{1}{2}\mathbf{a}^2. \quad (1.6)$$

De hecho, no es difícil verificar que tales generadores satisfacen las relaciones de conmutación estándar

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_-, K_+] = 2K_0,$$

del álgebra $su(1, 1)$. Es conocido que las representaciones unitarias irreducibles de este álgebra son los autovalores del *operador Casimir*

$$C := K_0^2 - K_+ \circ K_- = s(s-1)I. \quad (1.7)$$

Un cálculo directo del operador Casimir (1.7) considerando (1.6) muestra que el autovalor $s(s-1)$ en este caso particular es igual a $-\frac{3}{16}$. Esto significa que el parámetro s es, bien $\frac{1}{4}$, bien $\frac{3}{4}$. Cada uno de estos valores de s define una representación unitaria irreducible del álgebra $su(1, 1)$: $D^+(\frac{1}{4})$ consiste en las autofunciones del Hamiltoniano $\mathcal{H}$ que se corresponden con los autovalores $n + \frac{1}{4}$, $n = 0, 1, \dots$ del generador K_0 , mientras que $D^+(\frac{3}{4})$ se corresponde con los autovalores $n + \frac{3}{4}$ del mismo generador K_0 . Así de esta forma uno obtiene el espectro $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ del Hamiltoniano $\mathcal{H}$, sin resolver el problema de autovalores para la ecuación de Schrödinger correspondiente. Para más detalles referentes a este problema véase [15]. Una vez descrito con cierto detalle este ejemplo, en esta memoria, se considerará un problema análogo dando la solución para la gran mayoría de las familias clásicas no sólo dentro de las tablas de Hahn y de Askey, sino también de las familias Δ -clásicas sin llegar a entrar en detalle en lo referente a las representaciones unitarias irreducibles asociadas a las álgebras de Lie obtenidas.

Dicho problema ha sido estudiado dentro del marco de los polinomios ortogonales clásicos, entre otros, por Yu. F. Smirnov [126, 127, 128], N. M. Atakishiev [34, 36], S. K. Suslov [37, 38], R. Askey [29, 30], M. Lorente [96, 97], y G. Bangerezako [42, 43]. Y dentro del marco de los polinomios ortogonales semiclásicos, entre otros, por A. P. Magnus [44].

El primer problema que se considerará está íntimamente relacionado con el método de factorización de tipo Infeld & Hull – aunque Darboux y Schrödinger lo habían considerado antes [58, 120, 121] – los cuales lo emplearon para buscar soluciones analíticas de cierta clase de ecuaciones diferenciales [73].

Más tarde, Miller extendió dicho método a ecuaciones en diferencias [76] y q -diferencias – en el sentido de Hahn – [77]. Algunos de los trabajos más recientes pueden encontrarse, por ejemplo, en [13, 14, 16, 34, 35, 41, 96, 97, 128, 133].

Posteriormente se realizará un desarrollo de la obtención de los operadores creación y destrucción en el contexto más general siempre sin salirse del marco de los polinomios ortogonales clásicos. Dicho estudio es interesante desde el punto de vista de la Teoría espectral ya que se podrá describir el álgebra dinámica cerrada asociada a las familias clásicas y, por tanto, se podrá obtener otro tipo de propiedades de tipo espectral, e incluso analítico, de tales funciones.

Por otro lado, también es de vital importancia el estudio de propiedades que caractericen a las

familias de polinomios ortogonales clásicos, los denominados *Teoremas de caracterización*. Dicho problema fue originalmente considerado por Hahn [70] en el que caracterizó los polinomios ortogonales clásicos estándar. Posteriormente se han ido obteniendo nuevos Teoremas de caracterización tanto para los polinomios ortogonales Δ -clásicos como para los q -polinomios (véase [2, 10, 55, 64, 113]). Para más detalles relativos a los Teoremas de caracterización véase §2.4.

La relevancia de estos resultados está claramente justificada dado que permite caracterizar a las familias clásicas. En particular, las relaciones de estructura permiten obtener, entre otros, resultados relacionados con la Teoría espectral de funciones especiales como se verá más adelante.

Para la realización de esta memoria se han empleado diversas técnicas entre las que se encuentran la Teoría general de operadores, la Teoría general de funciones de variable compleja, la Teoría de Representación de Grupos, y la Teoría de Álgebras tanto conmutativas como no conmutativas.

1.3. Resultados más relevantes

En esta memoria se ha puesto especial énfasis en el estudio de las propiedades más relevantes de los polinomios ortogonales clásicos, y más concretamente de los q -polinomios. Durante el estudio de las familias de los q -polinomios se ha supuesto la máxima generalidad posible, esto es, se ha considerado la red más general posible

$$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q),$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son constantes que pueden depender del parámetro complejo q , pero no de s . En este sentido, se consideraron diversos problemas los cuales permitiesen, por un lado tomar destreza en el cálculo de propiedades algebraicas relativas a los q -polinomios, y por otro el conocimiento de diversas propiedades de tipo algebraico de los mismos.

En primer lugar se consideró el problema de encontrar dos operadores lineales de primer orden, L_n^+ y L_n^- , tales que diesen la factorización de tipo Infeld & Hull del siguiente operador lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} H_n := & e^{-\partial_s} \sqrt{(\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s))\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} \\ & + \sqrt{(\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s))\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} e^{\partial_s} \\ & - \left(\frac{(\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s))}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} - \lambda_n \nabla x_1(s) \right) I, \end{aligned}$$

siendo e^{∂_s} el operador desplazamiento, con $e^{\pm\partial_s} f(s) = f(s \pm 1)$.

Es decir, que las siguientes relaciones se satisficieran

$$\begin{aligned} u_n(s+1)H_n &= L_{n+1}^- \circ L_n^+ - h_n^\mp I, \\ u_n(s)H_{n+1} &= L_n^+ \circ L_{n+1}^- - h_n^\mp I, \end{aligned}$$

donde u_n es cierta función y $h_n^\mp$ cierta constante para cada $n = 0, 1, \dots$.

En [16] dicho problema se resolvió de forma general dándose fórmulas explícitas de tales operadores.

Posteriormente, se consideró un método de factorización que consistía en encontrar dos operadores, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, tales que

1. Factorizasen al operador lineal de segundo orden

$$\mathfrak{b} \circ \mathfrak{a} = C \frac{A(s)}{\nabla x_1(s)} \mathfrak{H}_q \frac{1}{A(s)} \circ I + E I,$$

donde C y E son ciertas constantes, A es cierta función que no se anula en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$, y

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_q := & e^{-\partial_s} \sqrt{(\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)) \sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} \\ & + \sqrt{(\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)) \sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} e^{\partial_s} \\ & - \left(\frac{(\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s))}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} \right) I, \end{aligned}$$

2. Verificasen la siguiente propiedad de conmutatividad

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_\zeta := \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} - \zeta \mathfrak{b} \circ \mathfrak{a} = I.$$

Además, también se analizó bajo qué condiciones los operadores, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ eran mutuamente adjuntos, i.e.

$$\langle \mathfrak{a}\Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, \mathfrak{b}\Phi \rangle, \quad \Psi, \Phi \in \mathbb{P},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interior respecto al cual las autofunciones asociadas, φ_n , son ortonormales.

En [14] se dieron condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el problema tiene solución dándose una gran variedad de ejemplos, algunos conocidos y otros nuevos, con sus respectivos operadores. Asimismo, se dieron condiciones suficientes sobre los operadores $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ para que fueran mutuamente autoadjuntos.

Aprovechando dichos resultados, en [13] se obtuvieron resultados análogos para el caso Δ -clásico tanto en el caso acotado (Hahn y Kravchuk) como el no acotado (Meixner y Charlier) describiendo el álgebra dinámica de simetría para los polinomios de Meixner y Kravchuk.

Además, durante el período de investigación se realizó el interés por el estudio de las familias de la escala superior tanto de la tabla de Hahn como de la de Askey, tales como los polinomios de Askey-Wilson, q -Racah, los q -polinomios grandes de Jacobi, entre otros. De hecho, en [27], se obtuvieron las propiedades fundamentales de los q -polinomios de Racah $u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)$ así como de sus duales $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)$, viéndose además la conexión de los coeficientes de Racah y el q -Algebra $SU_q(2)$.

Finalmente se realizaron dos trabajos relacionados con la Teoría de los q -polinomios semiclásicos. En el primero de ellos se realiza un estudio acerca de los límites de polinomios (q -polinomios de tipo Krall) que son ortogonales respecto a funcionales lineales q -clásicos perturbados mediante la adición de una o dos masas a dichos funcionales (para más detalles véase [17]) y en el segundo se obtuvieron nuevos Teoremas de caracterización para los polinomios q -semiclásicos (para más detalles véase [57]).

Antes de entrar a dar los detalles de cómo se obtuvieron estos resultados, en el siguiente capítulo se dará un breve repaso de las familias de polinomios ortogonales clásicos.

Preliminares

En este capítulo se darán las nociones básicas acerca de las familias clásicas analizando algunas de sus propiedades más importantes. Como se mencionó en el capítulo anterior, el conjunto de las familias clásicas está constituido por tres grandes grupos:

1. Los *polinomios clásicos estándar*, que son las soluciones polinómicas de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\tilde{\sigma}(x) \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \tilde{\tau}(x) \frac{d}{dx} y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (2.1)$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios de grado a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante independiente de x .

2. Los *polinomios Δ -clásicos*, que son las soluciones polinómicas de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$\sigma(s) \Delta \nabla y(s) + \tau(s) \Delta y(s) + \lambda y(s) = 0, \quad (2.2)$$

donde $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(s)$, $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante independiente de s .

3. Los *q -polinomios*, que son las soluciones polinómicas de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (2.3)$$

donde $\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2} \tau(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})$, $\tau(s) = \tilde{\tau}(x(s))$, y λ es una constante independiente de s .

Esta memoria se centrará en estudiar propiedades y aplicaciones relacionadas con los q -polinomios. Pero antes de realizar dicho estudio se verán, en primer lugar, algunas propiedades generales que involucran a todas las familias clásicas y, posteriormente, se mostrarán algunas propiedades relacionadas directamente con los q -polinomios.

2.1. Los espacios $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$

En este trabajo se considerarán polinomios $p(x) = a_mx^m + \cdots + a_1x + a_0$ como funciones polinómicas en x y con coeficientes complejos, i.e. $p \in \mathbb{P}$, donde por $\mathbb{P}$ se designará al espacio vectorial de los polinomios de variable compleja con coeficientes en $\mathbb{C}$ y por $\mathbb{P}_m$ al subespacio vectorial de los polinomios de grado a lo más m . Con la topología definida por la norma $\|\cdot\|_m$, donde, para $p \in \mathbb{P}_m$, se define

$$\|p\|_m = \sum_{i=0}^m |a_i|,$$

el espacio $\mathbb{P}_m$ es de Banach. De hecho, se tiene que $\mathbb{P}_m \subset \mathbb{P}_{m+1}$, $m \geq 0$ (inclusión estricta) y es claro que la topología de $\mathbb{P}_m$ es la misma a la inducida por la topología de $\mathbb{P}_{m+1}$. Por lo tanto, como

$$\mathbb{P} = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{P}_m,$$

de la teoría de los espacios localmente convexos se conduce a considerar, para $\mathbb{P}$, la topología límite inductivo estricto definida por la sucesión $\{\mathbb{P}_m\}_{m \geq 0}$. Como los espacios $\mathbb{P}_m$ son de Fréchet ya que son de Banach entonces, con esta topología, $\mathbb{P}$ es un espacio completo.

El *dual topológico* de $\mathbb{P}$ será representado por $\mathbb{P}'$,

$$\mathbb{P}' = \{\mathbf{u} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbf{u} \text{ lineal y continua}\}.$$

y, dado $p \in \mathbb{P}$, se representará por $\langle \mathbf{u}, p \rangle$ a la imagen de p por $\mathbf{u}$. En particular, para p de la forma x^n , el número complejo u_n , definido por $\langle \mathbf{u}, x^n \rangle$, se denominará *momento de orden n de $\mathbf{u}$* .

De entre todos los posibles elementos de $\mathbb{P}'$, debido al interés que se tendrá para la teoría que se desarrollará, se destacarán los siguientes:

1. La *medida de Dirac en el punto $c \in \mathbb{C}$* : se denotará por δ_c (o $\delta(x - c)$) y viene definida por

$$\langle \delta_c, p \rangle = p(c), \quad p \in \mathbb{P}.$$

2. *Funcionales definidos por funciones peso*: dada una función ω , no negativa e integrable sobre $\mathbb{R}$, satisfaciendo que $\int_{\mathbb{R}} \omega(x) dx > 0$ y que, para cada $n \geq 0$, $|\int_{\mathbb{R}} x^n \omega(x) dx| < \infty$ – en estas condiciones, se dirá que ω es una función peso – se puede definir un elemento $\mathbf{u}_\omega$ de $\mathbb{P}'$ por

$$\langle \mathbf{u}_\omega, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x) \omega(x) dx, \quad p \in \mathbb{P}, \quad (2.4)$$

cuyos momentos vendrá dados por

$$(\mathbf{u}_\omega)_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \omega(x) dx, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Nótese que en el caso de un funcional “discreto”, dada una función ω no negativa satisfaciendo que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \omega(s) \nabla x_1(s) > 0,$$

y que sus momentos sean finitos, i.e.

$$\sum_{s=0}^{\infty} x^n(s) \omega(s) \nabla x_1(s) < \infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

se dice que ω es una función peso – se puede definir un elemento $\mathbf{u}_\omega$ de $\mathbb{P}'$ – por

$$\langle \mathbf{u}_\omega, p \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} p(s) \omega(s) \nabla x_1(s), \quad p \in \mathbb{P}, \quad (2.5)$$

donde, como antes, $x_1(s) = x(s + \frac{1}{2})$.

3. *Funcionales de momentos*: dada una sucesión de números complejos $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$, se dirá que el funcional $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ es un funcional de momentos determinado por $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ si $\langle \mathbf{u}, x^n \rangle = \mu_n$, $n = 0, 1, \dots$

2.2. La propiedad de ortogonalidad

En general, en esta memoria, cuando se diga que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios se considerará que, para cada $n \geq 0$, $\text{grd } Q_n \leq n$, en el caso en que $\text{grd } Q_n = n$, $n \geq 0$, la sucesión de polinomios $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ se dirá *libre*. Se adoptará también el convenio $Q_n \equiv 0$ si $n < 0$.

Definición 2.2.1. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional de momentos y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios (SP). Se dirá que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ constituye una **sucesión (o un sistema) de polinomios ortogonales (SPO) respecto al funcional $\mathbf{u}$** si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\text{grd } P_n = n$, $n = 0, 1, \dots$,
2. $\langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = k_n \delta_{n,m}$, $(k_n \neq 0)$, $n, m = 0, 1, \dots$

En la mayoría de los ejemplos considerados de SPOs, el funcional $\mathbf{u}$ asociado está definido por una función peso ω , como en (2.5). Por ejemplo, es fácil verificar que los polinomios de Chebyshev de primera especie, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $n = 0, 1, \dots$, satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n > 0, \\ \pi & \text{si } m = n = 0. \end{cases}$$

Por lo que el funcional correspondiente funcional $\mathbf{u}$ admite una representación integral del tipo (2.4), con $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Aunque en muchas ocasiones $\mathbf{u}$ viene definida a través de una integral de Riemann-Stieltjes,

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x) d\psi(x), \quad p \in \mathbb{P}, \quad (2.6)$$

donde ψ es una función no decreciente, acotada y con un espectro¹ infinito.

Proposición 2.2.1. [55] Sea $\mathbf{u}$ un funcional de momentos y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO respecto al funcional $\mathbf{u}$,
- (b) $\langle \mathbf{u}, \pi P_n \rangle = 0$, para todo polinomio π de grado $m < n$,
 $\langle \mathbf{u}, \pi P_n \rangle \neq 0$, para todo polinomio π de grado n .
- (c) $\langle \mathbf{u}, x^m P_n \rangle = K_n \delta_{n,m}$, $(K_n \neq 0)$, $m = 0, 1, \dots, n$.

¹Se dice que x_0 es un *punto espectral* de la función no decreciente ψ si $\psi(x_0 + \delta) - \psi(x_0 - \delta) > 0$ para todo $\delta > 0$. El conjunto de los puntos espectrales constituye el *espectro* de ψ .

Pero, dado un funcional lineal $\mathbf{u}$, ¿bajo qué condiciones existe la SPO respecto a $\mathbf{u}$? Sea $\mathbf{u}$ un funcional de momentos y $\{u_n\}_{n \geq 0}$ la correspondiente sucesión de momentos. Se designará por H_n al *determinante de Hankel* de orden $n + 1$ asociado a la secuencia de los primeros $2n + 1$ momentos, i.e.,

$$H_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}.$$

Definición 2.2.2. Un funcional de momentos $\mathbf{u}$ se dice **regular** (o **quasi-definido**) si

$$H_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

La existencia de SPOs respecto a un funcional está ligado a la regularidad del funcional en cuestión.

Proposición 2.2.2. [55] Sea $\mathbf{u}$ un funcional de momentos. Es condición necesaria y suficiente para que exista una SPO respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ que éste sea regular.

De hecho, si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM), i.e. $P_n(x) = x^n + k'_n x^{n-1} + \cdots$, respecto al funcional de momentos $\mathbf{u}$, entonces P_n puede escribirse de manera explícita como

$$P_n(x) = H_{n-1}^{-1} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \cdots & u_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

y $P_0(x) = 1$. Otra forma de definir los polinomios ortogonales clásicos es a través de la ecuación distribucional que satisface el funcional $\mathbf{u}$.

Definición 2.2.3. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional regular. Se dice que $\mathbf{u}$ es un **funcional clásico** si existen dos polinomios, ϕ y ψ , con $\text{grd } \phi \leq 2$ y $\text{grd } \psi = 1$, tales que [101, 103]

$$\frac{d}{dx}[\phi \mathbf{u}] = \psi \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

A la correspondiente sucesión de polinomios se le denomina SPO clásica estándar.

Nota 2.2.1. La ecuación distribucional, evidentemente, dependerá del tipo de familia que se considere. Por ejemplo, la ecuación distribucional que satisfacen los funcionales q -clásicos es [113]

$$\frac{\Delta}{\nabla x_1(s)}[\phi \mathbf{u}] = \psi \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

y en el caso Δ -clásico [64]

$$\Delta[\phi \mathbf{u}] = \psi \mathbf{u}.$$

2.3. La relación de recurrencia a tres términos. Algunas consecuencias

Una característica importante de las SPOs se traduce en el hecho de que todas ellas verifican una ecuación en diferencias lineal y homogénea de segundo orden, que depende esencialmente de la propiedad de ortogonalidad y de que el conjunto $\{P_k\}_{k=0}^n$ forma una base de $\mathbb{P}_n$. De hecho, dado que el funcional $\mathbf{u}$ es regular y de tipo Hankel, i.e.

$$\langle \mathbf{u}, xp \rangle = \langle x\mathbf{u}, p \rangle, \quad p \in \mathbb{P},$$

se puede escribir, con la convención $P_{-1} \equiv 0$,

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

siendo

$$\alpha_n = \frac{\langle \mathbf{u}, xp_n p_{n+1} \rangle}{\langle \mathbf{u}, p_{n+1}^2 \rangle}, \quad \beta_n = \frac{\langle \mathbf{u}, xp_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, p_n^2 \rangle}, \quad y \quad \gamma_n = \frac{\langle \mathbf{u}, xp_n p_{n-1} \rangle}{\langle \mathbf{u}, p_{n-1}^2 \rangle} = \alpha_{n-1} \frac{\langle \mathbf{u}, p_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, p_{n-1}^2 \rangle}. \quad (2.10)$$

Por otro lado, si se desarrolla P_n en la forma

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \dots,$$

se pueden expresar dichos coeficientes de recurrencia en función de los coeficientes de los polinomios P_n , de hecho,

$$\alpha_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad \beta_n = \frac{k'_n}{k_n} - \frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}}, \quad y \quad \gamma_n = \frac{k''_n - \alpha_n k''_{n+1}}{k_{n-1}} - \frac{k'_n}{k_{n-1}} \beta_n.$$

Además, es posible obtener expresiones explícitas de los coeficientes correspondientes a x^{n-1} y x^{n-2} del polinomio mónico $k_n^{-1} P_n(x)$ en función de los coeficientes de recurrencia [55, pág. 19], de hecho

$$k_n^{-1} P_n(x) = x^n + \left(-\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \right) x^{n-1} + \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \beta_i \beta_j - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \right) x^{n-2} + \dots$$

Una consecuencia importante de la relación de recurrencia a tres términos (RRTT) tiene que ver con los ceros de los polinomios de una SPO: si $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$, entonces dos polinomios consecutivos de una SPO, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, no pueden tener ceros comunes. De hecho, si P_n y P_{n+1} tuviesen un cero común x_0 , aplicando sucesivamente (2.9) y dado que $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$, x_0 sería un cero de todos los polinomios de la SPO, en particular, x_0 sería cero de P_0 que es constante no nula, lo cual es imposible.

Otro resultado importante al que se hará referencia más adelante, que también es una consecuencia directa de la relación de recurrencia, es el siguiente [55, pág. 23]:

Proposición 2.3.1. (Identidad de Christoffel-Darboux) Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO cuya relación de recurrencia a tres términos viene dada por (2.9). Entonces,

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x) P_k(y)}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle} = \frac{\alpha_n}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (2.11)$$

En particular, tomando límites cuando $y \rightarrow x$, se obtiene la relación

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle} = \frac{\alpha_n}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} (P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x)). \quad (2.12)$$

Por último, se enunciará una propiedad que garantiza que el recíproco de la Proposición 2.2.1 es también cierto. Dicho resultado fue establecido por J. Favard en 1935 [63], y su prueba puede encontrarse en [55, pág. 22].

Proposición 2.3.2. (Favard) Sean $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ dos sucesiones arbitrarias de números complejos, y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios definida por la relación de recurrencia (2.9). Entonces existe un único funcional $\mathbf{u}$, definido sobre $\mathbb{P}$, tal que

$$\langle \mathbf{u}, 1 \rangle = u_0 \neq 0, \quad y \quad \langle \mathbf{u}, P_n P_m \rangle = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

$\mathbf{u}$ es regular y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es la correspondiente SPOM si y sólo si $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$. Además $\mathbf{u}$ es definida positiva si y sólo si β_n es real y $\gamma_n > 0$, $n \geq 1$.

Nota 2.3.1. La condición $\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle \neq 0$, $n \geq 1$ es una consecuencia inmediata de la propia relación de recurrencia y del hecho de ser $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$.

2.4. Los Teoremas de caracterización

Como ya se mencionó anteriormente, los teoremas de caracterización indican las principales propiedades que caracterizan a las familias clásicas.

Una de las diversas formas que se conocen para caracterizar una familia de polinomios ortogonales clásicos es a través de la *primera relación de estructura*

$$\sigma(x)p'_n(x) = \tilde{\alpha}_n p_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n p_n(x) + \tilde{\gamma}_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

donde $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ son tres sucesiones de números y ϕ es un polinomio de grado a lo más 2.

La caracterización de los polinomios ortogonales clásicos estándar a través de la relación (2.13) fue dada por Al-Salam & Chihara [3] (véase también [101]).

A. G. García, F. Marcellán y L. Salto [64] probaron que la relación (2.13) también caracterizaba a los polinomios Δ -clásicos (polinomios de Hahn, Krawtchouk, Meixner y Charlier) donde las derivadas es reemplazada por el operador en diferencias finitas progresivas Δ .

Posteriormente J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán [113] (véase también [10]) caracterizaban los q -polinomios de la clase de Hahn a través de la fórmula de estructura obtenida a través de (2.13) reemplazando la derivada por la q -derivada $\mathcal{D}_q$, definida como

$$\mathcal{D}_q f(z) := \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| \neq 1.$$

A finales de los años 90, W. Al-Salam [2] resumió las diferentes formas que se conocían de caracterizar las SPOs clásicas.

Otra forma de caracterizarlas fue obtenida de forma unificada en [101] usando como punto de partida la ecuación diferencial distribucional (2.7) que satisface el funcional de momentos asociado. El siguiente Teorema resume las distintas caracterizaciones para los polinomios ortogonales clásicos.

Teorema 2.1. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ un funcional regular, y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la correspondiente SPOM ortogonal respecto al funcional $\mathbf{u}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(C1) (Marcellán et. al. [101, 103]) $\{P_n\}$ es una familia clásica, i.e., existen dos polinomios, ϕ y ψ , con $\text{grd } \phi \leq 2$ y $\text{grd } \psi = 1$, tales que $\mathbf{u}$ satisface la ecuación diferencial distribucional

$$\frac{d}{dx}[\phi \mathbf{u}] = \psi \mathbf{u}.$$

(C2) (Al-Salam, Chihara, [3]): Existe un polinomio ϕ , con $\text{grd } \phi \leq 2$, y tres sucesiones de números complejos, $\{a_n\}_{n \geq 0}$, $\{b_n\}_{n \geq 0}$, y $\{c_n\}_{n \geq 0}$, con $c_n \neq 0$, $n \geq 0$, tales que

$$\phi(x)P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

(C3) (Hahn, [70]): La sucesión de polinomios $\{Q_n \equiv P'_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una SPO (respecto al funcional regular $\mathbf{v} = \phi \mathbf{u}$).

(C4) (Marcellán et. al., [101]): Existen sucesiones de números complejos, $\{r_n\}_{n \geq 0}$, y $\{s_n\}_{n \geq 0}$, tales que

$$(n+1)P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

(C5) (Bochner, [49]): Existen dos polinomios, ϕ y ψ , y una sucesión de números reales, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, con $\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$, tales que P_n es solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\phi(x)y'' + \psi(x)y' + \lambda_n y = 0.$$

Nota 2.4.1. Para cada n , dado que P_n es un polinomio, se tiene que

$$\lambda_n = -n \left(\psi' + (n-1) \frac{\phi''}{2} \right).$$

(C7) (McCarthy, [111]): Existen dos polinomios, ϕ y ψ , con $\text{grd } \phi \leq 2$ y $\text{grd } \psi = 1$, y dos sucesiones de números complejos, $\{g_n\}_{n \geq 0}$ y $\{h_n\}_{n \geq 0}$, tales que

$$\phi(x)(P_n P_{n-1})'(x) = g_n P_n^2(x) - (\psi(x) - \phi'(x))P_n(x)P_{n-1}(x) + h_n P_{n-1}^2(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

(C8) (Versión distribucional de la fórmula de Rodrigues, [101]): Existen un polinomio ϕ de grado a lo más 2 y una sucesión números complejos no nulos, $\{k_n\}_{n \geq 0}$, tales que

$$P_n(x)\mathbf{u} = k_n D^n[\phi^n(x)\mathbf{u}], \quad n = 0, 1, \dots$$

Recientemente, se han obtenido nuevos resultados análogos al anterior para los q -polinomios de la tabla de Hahn. De hecho, J. C. Medem et al. [112, 113] los obtienen tomando la ecuación diferencial distribucional (2.7) como punto de partida. R. Álvarez y M. Álfaro los obtienen en [4] para el caso discreto. Finalmente en [10], R. Álvarez obtiene resultados análogos usando como idea de base la q -linealidad de la red y el siguiente resultado:

Teorema 2.2. Teorema de Hahn-Lesky Dada una SP, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, es una sucesión clásica si y sólo si

- La sucesión de sus diferencias $\{\Delta P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales [64, 95].
- La sucesión de sus q -diferencias $\{\mathcal{D}_q P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales [70, 113].

2.4.1. Funciones hipergeométricas

Siguiendo [65], se define la *serie hipergeométrica básica* ${}_r\varphi_s$ de parámetros, $a_1, a_2, \dots, a_r$, y $b_1, b_2, \dots, b_s$, como

$${}_r\varphi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, b_2, \dots, b_s; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k} \left[(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \right]^{s-r+1}, \quad (2.14)$$

donde, para simplificar la notación, se denotará $(a_1, a_2, \dots, a_m; q)_k$ a la expresión

$$(a_1; q)_k (a_2; q)_k \cdots (a_m; q)_k,$$

siendo $(a; q)_k$ unos q -análogos de los símbolos de Pochhammer², $(a)_k$, los cuales vienen definidos por

$$(a; q)_0 := 1, \quad \text{y} \quad (a; q)_k := (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Claramente

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^\alpha; q)_k}{(1-q)^\alpha} = (\alpha)_k.$$

Además, $(a; q)_k$ puede también definirse para los números enteros negativos, esto es,

$$(a; q)_{-k} := \frac{1}{(1-aq^{-1})(1-aq^{-2}) \cdots (1-aq^{-k})}, \quad a \neq q, q^2, \dots, q^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

de modo que

$$(a; q)_{-n} = \frac{1}{(aq^{-n}; q)_n} = \frac{(-qa^{-1})_n}{(qa^{-1}; q)_n} q^{\binom{n}{2}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

De hecho, se define $(a; q)_\infty$ como

$$(a; q)_\infty := \lim_{n \rightarrow +\infty} (a; q)_n = \prod_{k=0}^{\infty} (1-aq^k).$$

Para más detalles consultar [65].

Se asumirá que los factores que aparecen en el denominador no se cancelan nunca. Si se denota por v_n al término general de dicha serie, obsérvese que

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{(1-a_1q^k) \cdots (1-a_rq^k)}{(1-b_1q^k) \cdots (1-b_sq^k)(1-q^{k+1})} z (-q^k)^{s-r+1},$$

es una función racional de q^k . De hecho, si uno de los parámetros a_i es igual a q^k donde k es un número entero no negativo entonces dicha serie es un polinomio en z . En otro caso, el radio de convergencia ρ de dicha serie viene dado por

$$\rho := \begin{cases} \infty & \text{si } r < s+1, \\ 1 & \text{si } r = s+1, \\ 0 & \text{si } r > s+1. \end{cases}$$

El caso especial $r = s+1$ se lee de la forma

$${}_{s+1}\varphi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{s+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{s+1}; q)_k}{(b_1, b_2, \dots, b_s; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k}.$$

²Los símbolos de Pochhammer $(a)_k$ vienen definidos por $(a)_0 := 1$, y $(a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$, $k = 1, 2, \dots$,

Dicha serie hipergeométrica básica fue introducida por Heine in 1846 – de ahí que en ocasiones de denominen *series de Heine* –. Una serie hipergeométrica básica donde $z = q$ y $qa_1a_2 \cdots a_{s+1} = b_1b_2 \cdots b_s$ se denomina compensada (o Saalschütziana).

Se define la q -función hipergeométrica ${}_rF_s$ mediante la expresión

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, z \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1|q)_k \cdots (a_r|q)_k}{(b_1|q)_k \cdots (b_s|q)_k} \frac{z^k}{(1|q)_q} \left[\kappa_q^{-k} q^{\frac{k(k-1)}{4}} \right]^{s-r+1}, \quad (2.15)$$

donde $(a|q)_k$ son otros q -análogos de los símbolos de Pochhammer definidos como [115]

$$(a|q)_k := \prod_{m=0}^{k-1} [a+m]_q = \frac{\tilde{\Gamma}(a+k)}{\tilde{\Gamma}(a)} = (-1)^k (q^a; q)_k \kappa_q^{-k} q^{-\frac{k}{4}(k-1) - \frac{ka}{2}}, \quad (2.16)$$

siendo $\tilde{\Gamma}(x)$ un q -análogo de la función Γ introducida en [115, Eq.(3.2.24)], y relacionada con la función q -Gamma clásica Γ_q mediante la fórmula

$$\tilde{\Gamma}(s) = q^{-\frac{(s-1)(s-2)}{4}} \Gamma_q(s) = q^{-\frac{(s-1)(s-2)}{4}} (1-q)^{1-s} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^s; q)_{\infty}}, \quad 0 < q < 1.$$

De hecho se tiene

$$\tilde{\Gamma}(x+1) = [x]_q \tilde{\Gamma}(x),$$

y

$$(1|q)_k = \tilde{\Gamma}(k+1) = (-1)^k q^{-\frac{k}{4}(k+1)} \kappa_q^{-k} (q; q)_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nota 2.4.2. Nótese que ambas funciones están relacionadas mediante la expresión [118]

$${}_{p+1}\varphi_p \left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, \dots, q^{a_{p+1}} \\ q^{b_1}, q^{b_2}, \dots, q^{b_p} \end{matrix} \middle| q, z \right) = {}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| q, t \right) \Big|_{t=t_0}, \quad (2.17)$$

donde

$$t_0 = zq^{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{p+1} a_i - \sum_{i=1}^p b_i)}.$$

Para más información acerca de las series hipergeométricas básicas véase, entre otros, [28, 65].

2.5. Generalidades sobre el q -cálculo

2.5.1. Diferenciación e integración

Los polinomios ortogonales q -clásicos, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, (Grandes q -Jacobi, q -Laguerre, Al-Salam & Carlitz I, etc) se caracterizan por verificar la propiedad que la sucesión de sus q -diferencias $\{\Delta^{(1)}P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ son, de nuevo, ortogonales (propiedad de Hahn, véase [70]). De hecho, si la red $x(s)$ es de tipo lineal, el operador $\Delta^{(1)}$ es un caso particular del *operador de Hahn* el cual se define como

$$L_{q,\omega}(f)(x) = \frac{f(qx + \omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}, \quad \omega \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{C}, |q| \neq 1. \quad (2.18)$$

Nota 2.5.1. Como caso particular de dicho operador está el operador q -derivada, $\mathcal{D}_q$, que coincide con $L_{q,0}$, esto es

$$\mathcal{D}_q(f)(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}. \quad (2.19)$$

Si f es una función diferenciable, el operador $\mathcal{D}_q$ verifica

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{D}_q(f)(x) = \frac{d}{dx}[f(x)].$$

A título de ejemplo, obsérvese que la acción de $\mathcal{D}_q$ sobre $f(x) = x^a$

$$\mathcal{D}_q[x^a] = \frac{q^a - 1}{q - 1} x^{a-1} = [a]x^{a-1}.$$

A partir de (2.19) puede deducirse el análogo de la fórmula de Leibniz

$$\mathcal{D}_q[fg](x) = f(qx)\mathcal{D}_q[g(x)] + g(x)\mathcal{D}_q[f(x)]. \quad (2.20)$$

Por otro lado, la q -integral viene definida por

$$\int_0^z f(t) d_q t := (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(zq^n) z q^n. \quad (2.21)$$

Esta definición se debe a F. H. Jackson, que además definió dicha q -integral sobre $(0, \infty)$ como

$$\int_0^{\infty} f(t) d_q t := (1 - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n. \quad (2.22)$$

Además, con esa definición

$$\int_{z_1}^{z_2} f(t) d_q t = \int_0^{z_2} f(t) d_q t - \int_0^{z_1} f(t) d_q t.$$

Si f es continua en $[0, z]$, entonces se tiene que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^z f(t) d_q t = \int_0^z f(t) dt.$$

Otra consecuencia inmediata de dicha definición es

$$\int_0^z \mathcal{D}_q(f)(t) d_q t = f(z) - f(0). \quad (2.23)$$

Por último, combinando (2.20) y (2.23) se deduce la *fórmula de integración por partes*:

$$\int_a^b f(x) \mathcal{D}_q g(x) d_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) \mathcal{D}_q f(x) d_q x. \quad (2.24)$$

Más información relativa al q -cálculo descrito de una forma sencilla y con rigor puede encontrarse, por ejemplo, en [79].

2.6. Preliminares relativos a los q -polinomios

Dado que la mayoría de los resultados que se obtendrán en esta memoria están relacionados con los q -polinomios, se darán previamente las propiedades más importantes de estos.

Los q -polinomios son, como ya se mencionó anteriormente, las soluciones polinómicas de la ecuación en diferencias de segundo orden que resulta al discretizar (2.1).

Más concretamente, se sustituyen las derivadas en (2.1) por sus correspondientes aproximaciones en una red no uniforme

$$y' \sim \frac{1}{2} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right],$$

$$y'' \sim \frac{1}{x(s+\frac{h}{2}) - x(s-\frac{h}{2})} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right].$$

Definición 2.6.1. Una **red** es una función compleja $x \in C^2(\Lambda)$ definida sobre el dominio complejo Λ , con $\mathbb{N}_0 \subseteq \Lambda$, y $x(s)$, $s = 0, 1, \dots$ son los puntos donde se discretizará el operador (2.1).

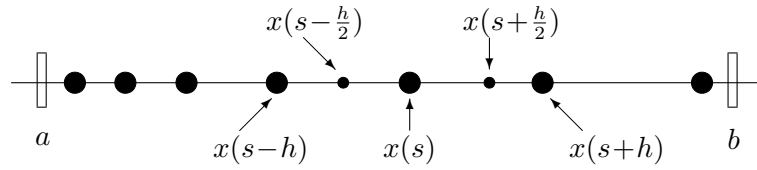


Figura 2.1: Discretización en una red no uniforme $x(s)$

La razón de escribir el factor $x(s+\frac{h}{2}) - x(s-\frac{h}{2})$ se debe a que la diferencia generalizada

$$\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)},$$

aproxima mejor a la primera derivada en $x(s-\frac{h}{2})$, que en $x(s)$ [115, pág. 55]. De hecho tomando dichas aproximaciones, el operador obtenido aproxima a (2.1) hasta orden $\mathcal{O}(h^2)$.

Asumiendo, por comodidad, $h = 1$, se obtiene la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (2.25)$$

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(s) \nabla x_1(s), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(s),$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios³ en x de grado a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante independiente de s .

A partir de ahora, se usará la siguiente notación para los coeficientes del desarrollo de Taylor de $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\sigma}(s) \equiv \tilde{\sigma}[x(s)] = \frac{\tilde{\sigma}''}{2} x^2(s) + \tilde{\sigma}'(0)x(s) + \tilde{\sigma}(0), \quad \tilde{\tau}(s) \equiv \tilde{\tau}[x(s)] = \tilde{\tau}'x(s) + \tilde{\tau}(0). \quad (2.26)$$

Una propiedad esencial es el carácter hipergeométrico de dicha ecuación, i.e. la k -ésima q -diferencia de una solución, y , de la ecuación (2.25), definida como

$$y_k(s) = \Delta^{(k)}y(s) := \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)} \frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)} \cdots \frac{\Delta}{\Delta x(s)} y(s),$$

³De ahora en adelante, cuando se diga que p es un polinomio en x_k , $k \in \mathbb{Z}$, uno se estará refiriendo a que p es un polinomio en $x_k(s) := x(s + \frac{k}{2})$.

también satisface una ecuación en diferencias del mismo tipo. De hecho,

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_{k+1}(s)} \frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)} + \tau_k(s) \frac{\Delta y_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \mu_k y_k(s) = 0, \quad (2.27)$$

donde $x_k(s) = x(s + \frac{k}{2})$, y [115, pág. 62, (3.1.29)]

$$\tau_k(s) = \frac{\sigma(s+k) - \sigma(s) + \tau(s+k)\Delta x(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad y \quad \mu_k = \lambda + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Delta \tau_m(s)}{\Delta x_m(s)}. \quad (2.28)$$

Es importante recalcar que la ecuación en diferencias anterior admite soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico si y sólo si $x(s)$ es una función de la forma [40, 118]

$$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q) = c_1(q)(q^s + q^{-s-\mu}) + c_3(q), \quad (2.29)$$

donde $c_i \equiv c_i(q)$, $i = 1, 2, 3$, son constantes las cuales, en general, dependen de q .

Nota 2.6.1. Si $|\mu| < \infty$, entonces $q^\mu = \frac{c_1(q)}{c_2(q)}$, además en ese caso $x(s) = x(-s - \mu)$.

Para dicha red, un cálculo sencillo muestra que τ_k es un polinomio de primer grado en x_k de la forma (véase, por ejemplo, [16, 40])

$$\begin{aligned} \tau_k(s) &= \tau'_k x_k(s) + \tau_k(0), \quad \tau'_k = [2k]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} + \alpha_q(2k) \tilde{\tau}', \\ \tau_k(0) &= \frac{c_3 \tilde{\sigma}''}{2} (2[k]_q - [2k]_q) + \tilde{\sigma}'(0)[k]_q + c_3 \tau'(\alpha_q(k) - \alpha_q(2k)) + \tilde{\tau}(0) \alpha_q(k), \end{aligned} \quad (2.30)$$

y

$$\lambda_n = -[n]_q \left\{ \alpha_q(n-1) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\},$$

donde los q -números $[k]_q$ (en su forma simétrica) y $\alpha_q(k)$ vienen definidos por

$$[k]_q = \frac{q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_q(k) = \frac{q^{\frac{k}{2}} + q^{-\frac{k}{2}}}{2}. \quad (2.31)$$

Además en [115] se probó que las soluciones polinómicas de (2.27) (así como las soluciones polinómicas de (2.25)) venían determinadas por el q -análogo de la fórmula de Rodrigues sobre la red general definida en (2.29)

$$\frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)} \cdots \frac{\Delta}{\Delta x(s)} P_n(s) \equiv \Delta^{(k)} P_n(s) = \frac{A_{n,k} B_n}{\rho_k(s)} \nabla_k^{(n)} \rho_n(s), \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_k^{(n)} &:= \frac{\nabla}{\nabla x_{k+1}(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_{k+2}(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)}, \quad k = 0, 1, \dots \\ A_{n,k} &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} \prod_{m=0}^{k-1} \left\{ \alpha_q(n+m-1) \tilde{\tau}' + [n+m-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y B_n es una constante no nula. Así [115, pág. 66, (3.2.19)]

$$P_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla_0^{(n)} \rho_n(s). \quad (2.34)$$

A partir de (2.34) se sigue la fórmula explícita para P_n [115, Eq.(3.2.30)]

$$P_n(s) = B_n \sum_{m=0}^n \frac{[n]_q! (-1)^{m+n}}{[m]_q! [n-m]_q!} \frac{\nabla x(s+m-\frac{n-1}{2})}{\prod_{l=0}^n \nabla x(s+\frac{m-l+1}{2})} \frac{\rho_n(s-n+m)}{\rho(s)}, \quad (2.35)$$

Usando la fórmula anterior puede verse [40, 115, 118] que la solución polinómica más general de la ecuación q -hipergeométrica (2.25) se corresponde con

$$\sigma(s) = A \prod_{i=1}^4 [s-s_i]_q = C q^{-2s} \prod_{i=1}^4 (q^s - q^{s_i}), \quad (2.36)$$

donde A y C son constantes no nulas y $s_i, i = 1, 2, 3, 4$, son constantes complejas y tiene la forma [118, p. 240, Eq. (49a)]

$$P_n(s) = D_n {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{matrix} ; q, q \right), \quad (2.37)$$

donde el factor de normalización D_n viene dado por

$$D_n = B_n \left(\frac{-A}{c_1 q^\mu \kappa_q^5} \right)^n q^{-\frac{n}{2}(3s_1+s_2+s_3+s_4+\frac{3(n-1)}{2})} (q^{s_1+s_2+\mu}; q)_n (q^{s_1+s_3+\mu}; q)_n (q^{s_1+s_4+\mu}; q)_n,$$

donde, como antes, $\kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$ y ${}_r\varphi_s$ es una serie hipergeométrica básica.

De hecho, en general, la fórmula explícita de λ_n es [118, p. 232, Eq. (52)]

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\frac{A q^\mu}{c_1^2(q) \kappa_q^4} [n]_q [s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2\mu + n - 1]_q \\ &= -\frac{C q^{-n+\frac{1}{2}}}{\kappa_q^2 c_1^2(q)} (1 - q^n) (1 - q^{s_1+s_2+s_3+s_4+2\mu+n-1}), \end{aligned} \quad (2.38)$$

la cual puede obtenerse igualando las potencias de q^s en (2.25).

Además, teniendo en cuenta (2.15) y (2.17), (2.37) puede escribirse en términos de las q -funciones hipergeométricas ${}_rF_s$ como [118, p.232, Eq.(49)]

$$\begin{aligned} P_n(s) &= B_n \left(\frac{A}{c_1(q) q^{-\frac{\mu}{2}} \kappa_q^2} \right)^n (s_1 + s_2 + \mu|q)_n (s_1 + s_3 + \mu|q)_n \\ &\quad \times (s_1 + s_4 + \mu|q)_n {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, 2\mu + n - 1 + \sum_{i=1}^4 s_i, s_1 - s, s_1 + s + \mu \\ s_1 + s_2 + \mu, s_1 + s_3 + \mu, s_1 + s_4 + \mu \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ambas ecuaciones en diferencias, (2.25) y (2.27), pueden reescribirse en forma simétrica

$$\frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \left[\sigma(s) \rho(s) \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda_n \rho(s) y(s) = 0,$$

y

$$\frac{\Delta}{\nabla x_{k+1}(s)} \left[\sigma(s) \rho_k(s) \frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)} \right] + \mu_k \rho_k(s) y_k(s) = 0,$$

donde $\rho_0(s) = \rho(s)$ y

$$\rho_k(s) = \rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1) = \rho(s+k) \prod_{m=1}^k \sigma(s+m), \quad k = 1, 2, \dots$$

Es más, dichas funciones, ρ y $\rho_k(s)$, satisfacen las ecuaciones en diferencias de tipo Pearson

$$\frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s), \quad \frac{\Delta}{\nabla x_{k+1}(s)} [\sigma(s)\rho_k(s)] = \tau_k(s)\rho_k(s), \quad (2.40)$$

respectivamente.

Nota 2.6.2. *Teniendo en cuenta (2.40) se deduce que*

$$\tau_n(s) = \frac{\sigma(-s-n-\mu) - \sigma(s)}{\nabla x_{n+1}(s)}. \quad (2.41)$$

Por otro lado, puede probarse [115], empleando la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico (2.25), que si se satisfacen las condiciones de contorno

$$\sigma(a)\rho(a)x_{-1}^k(a) = \sigma(b)\rho(b)x_{-1}^k(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.42)$$

entonces los polinomios P_n son ortogonales respecto a la función ρ , la cual está soportada sobre el intervalo $[a, b]$, sobre la red x , i.e.,

$$\sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)P_m(s)\rho(s)\nabla x_1(s) = d_n^2\delta_{nm}, \quad \Delta s = 1, \quad (2.43)$$

donde ρ es una solución de la ecuación de tipo Pearson (2.40). En el caso especial que la red sea de la forma $x(s) = q^s$ la relación anterior puede escribirse en términos de la q -integral de Jackson (véase, por ejemplo, [65, 85]) de la forma:

$$\int_{q^a}^{q^b} P_n(t)_q P_m(t)_q \omega(t) d_q t = \delta_{nm} q^{\frac{1}{2}} d_n^2, \quad t = q^s, \quad \omega(t) \equiv \omega(q^t) = \rho(t). \quad (2.44)$$

Nótese que las condiciones de contorno (2.42) son válidas para $k = 0$. Además, si se asume que a es finito, entonces (2.42) se satisface para $s = a$ proporcionándose que $\sigma(a) = 0$ [115, §3.3, pág. 70]. A partir de ahora se asumirá que se satisfacen dichas condiciones de contorno. La norma cuadrática en (2.43) viene dada por [115, §3.7.2, pág. 104]

$$d_n^2 = (-1)^n A_{n,n} B_n^2 \sum_{s=a}^{b-n-1} \rho_n(s) \nabla x_{n+1}(s).$$

Hay también una ortogonalidad denominada ortogonalidad continua. De hecho, si existe una curva Γ tal que

$$\int_{\Gamma} \Delta[\rho(z)\sigma(z)x^k(z - \tfrac{1}{2})] dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.45)$$

entonces [115]

$$\int_{\Gamma} P_n(z)_q P_m(z)_q \rho(z) \Delta x(z - \tfrac{1}{2}) dz = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

Tenindose en cuenta la definición de la red $x(s)$ dada en (2.29) se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.6.1.

$$\Delta^{(k)} x^n(s) = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} x_k^{n-k}(s) + c_3 \left(n \frac{[n-1]_q!}{[n-k-1]_q!} - (n-k) \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} \right) x_k^{n-k-1}(s) + \dots$$

En el caso $k = n - 1$, dicha expresión se convierte en

$$\Delta^{(n-1)} x^n(s) = [n]_q! x_{n-1}(s) + c_3 [n-1]_q! (n - [n]_q). \quad (2.46)$$

Ahora, usándose la fórmula de Rodrigues (2.32) para $k = n - 1$,

$$\Delta^{(n-1)} P_n(x(s))_q = \frac{A_{n,n-1} B_n}{\rho_{n-1}(s)} \nabla_{n-1}^{(n)} \rho_n(s) = \frac{A_{n,n-1} B_n}{\rho_{n-1}(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)} \rho_n(s),$$

así como $\rho_n(s) = \rho_{n-1}(s+1)\sigma(s+1)$, $x_n(s) = x_{n-1}(s + \frac{1}{2})$ y la ecuación de tipo Pearson (2.40) para $\rho_{n-1}(s)$, se obtiene que

$$\Delta^{(n-1)} P_n(x(s))_q = A_{n,n-1} B_n \tau_{n-1}(s).$$

Por lo tanto, si $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \dots$,

$$k_n = \frac{A_{n,n-1} B_n \tilde{\tau}'_{n-1}}{[n]_q!} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \alpha_q(n+k-1) \tilde{\tau}' + [n+k-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}, \quad (2.47)$$

y

$$\frac{k'_n}{k_n} = \frac{[n]_q \tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}} + c_3([n]_q - n).$$

Así los coeficientes de la RRTT (2.9) vienen dados por

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{B_n}{B_{n+1}} \frac{\alpha_q(n-1) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2}}{(\alpha_q(2n-1) \tilde{\tau}' + [2n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2})(\alpha_q(2n) \tilde{\tau}' + [2n]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2})} = -\frac{B_n}{B_{n+1}} \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{[2n]_q [2n+1]_q}{\lambda_{2n} \lambda_{2n+1}}, \\ \beta_n &= \frac{[n]_q \tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}} - \frac{[n+1]_q \tilde{\tau}_n(0)}{\tilde{\tau}'_n} + c_3([n]_q + 1 - [n+1]_q). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando la fórmula de Rodrigues se deduce la siguiente relación [11, 115]

$$\sigma(s) \frac{\nabla P_n(x(s))_q}{\nabla x(s)} = \frac{\lambda_n}{[n]_q \tau'_n} \left(\tau_n(s) P_n(x(s))_q - \frac{B_n}{B_{n+1}} P_{n+1}(x(s))_q \right),$$

donde τ_n viene dado por (2.30), y

$$\tau'_n = \frac{\lambda_{2n+1}}{[2n+1]_q}.$$

Entonces, empleando la expresión explícita para α_n , se deduce que

$$\sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} = \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} P_n(s) - \frac{\alpha_n \lambda_{2n}}{[2n]_q} P_{n+1}(s). \quad (2.49)$$

Dicha ecuación define el siguiente operador creación en términos de las diferencias regresivas

$$\mathbf{l}_n^+ := \sigma(s) \frac{\nabla}{\nabla x(s)} - \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} \circ I,$$

a través del cual se puede obtener el polinomio P_{n+1} a partir del polinomio P_n , de hecho,

$$\mathbf{I}_n^+ P_n(s) = -\frac{\alpha_n \lambda_{2n}}{[2n]_q} P_{n+1}(s).$$

Si se tiene en cuenta que $\nabla = \Delta - \nabla \Delta$, la ecuación en diferencias de segundo orden y la RRTT se obtiene que

$$\begin{aligned} (\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)) \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} &= \frac{\gamma_n \lambda_{2n}}{[2n]_q} P_{n-1}(s) \\ + \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \lambda_n \nabla x_1(s) - \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) \right) P_n(s). \end{aligned} \quad (2.50)$$

El cual da lugar al operador destrucción [11]

$$\mathbf{I}_n^- := (\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)) \frac{\Delta}{\Delta x(s)} - \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \lambda_n \nabla x_1(s) - \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) \right) \circ I,$$

a través del cual se puede obtener el polinomio P_{n-1} a partir del polinomio P_n , de hecho,

$$\mathbf{I}_n^- P_n(s) = \frac{\gamma_n \lambda_{2n}}{[2n]_q} P_{n-1}(s).$$

Nota 2.6.3. Las ecuaciones (2.49) y (2.50) se denominan ecuaciones de diferenciación y cuando la red es de tipo lineal dan lugar a la primera relación de estructura asociadas a los q -polinomios.

Antes de pasar a detallar otras generalidades relacionadas con los q -polinomios se menciona que en el apéndice A, se darán los principales datos relativos a los q -polinomios de las tablas de Askey y de Hahn considerados en la memoria (véase la tabla A.1).

Un enfoque general de las familias clásicas

Es bien conocido el hecho que las familias clásicas de polinomios ortogonales se caracterizan por ser las autofunciones polinómicas de un operador lineal de segundo orden. De hecho, dicho operador lineal es un operador diferencial en el caso estándar y en diferencias en el caso discreto.

En este capítulo se pretende presentar un enfoque general de los polinomios ortogonales clásicos en el contexto más general usando calculo diferencial y en diferencias, y teoría de operadores obteniéndose una representación de los polinomios ortogonales clásicos que permite trabajar con cualquiera de ellos de la misma forma dando, además, un teorema de caracterización que es válido para todas las familias clásicas el cual no se conocía hasta el momento.

Una de las piezas clave de esta representación es el *operador de Rodrigues* el cual se definirá de una forma intuitiva a medida que se van desarrollando las propiedades que ya se conocen acerca de las familias clásicas.

Nota 3.0.4. En [56] puede encontrarse la versión completa del trabajo desarrollado en este capítulo.

3.1. Conexión con la Teoría de operadores

Los polinomios ortogonales estándar, como se mencionó anteriormente, son las soluciones polinómicas de la ecuación diferencial lineal de segundo orden (2.1) por lo tanto, desde el punto de vista de la Teoría de operadores, son autofunciones del siguiente operador lineal de segundo orden

$$\mathfrak{H} := \tilde{\sigma}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{\tau}(x) \frac{d}{dx}, \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente.

De hecho, si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SP estándar, ésta satisface la relación

$$\mathfrak{H}P_n(x) = (n\tilde{\tau}' + n(n-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2})P_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

y son ortogonales respecto a cierta función peso ρ soportada sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, i.e.

$$\int_{\Omega} P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = d_n^2\delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Nota 3.1.1. La función peso ρ debe satisfacer ciertas condiciones de contorno en la frontera de Ω .

Además, dicha función peso ρ satisface la ecuación diferencial de Pearson

$$\frac{d}{dx}[\tilde{\sigma}(x)\rho(x)] = \tilde{\tau}(x)\rho(x). \quad (3.4)$$

Ahora se considerarán dos discretizaciones del operador (3.1) reemplazando el operador derivada por ciertas aproximaciones.

Una aproximación del operador $\mathfrak{H}$ consiste en sustituir las derivadas por sus correspondientes aproximaciones en una red uniforme

$$y' \sim \frac{1}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right],$$

$$y'' \sim \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right],$$

que aproxima a $\mathfrak{H}$ en una red uniforme con paso $\Delta x = h$ hasta un orden de $\mathcal{O}(h^2)$ [115].

Generalmente se estudia el caso $h = 1$, que conduce al operador en diferencias lineal de segundo orden escrito en términos de los operadores en diferencias finitas progresivas, Δ , y regresivas, ∇ , con paso $\Delta x = h = 1$.

$$\mathfrak{H}_\Delta := \sigma(s)\Delta\nabla + \tau(s)\Delta,$$

$$\Delta f(s) = f(s+1) - f(s), \quad \nabla f(s) = f(s) - f(s-1), \quad (3.5)$$

donde $\sigma(x) := \tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)$ es un polinomio de grado a lo más 2 y $\tau(x) = \tilde{\tau}(x)$.

De hecho, si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SP Δ -clásica, esta satisface la relación

$$\mathfrak{H}_\Delta P_n(s) = (n\tilde{\tau}' + n(n-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}) P_n(s), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

y es ortogonal respecto a cierta función peso ρ soportada sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, i.e.

$$\sum_{s \in \Omega} P_n(s)P_m(s)\rho(s) = d_n^2 \delta_{n,m}, \quad \Delta s = 1, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

Como en el caso estándar, la función peso ρ debe satisfacer tanto ciertas condiciones de contorno como la ecuación en diferencias de tipo Pearson:

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s). \quad (3.8)$$

Otra posibilidad consiste en sustituir las derivadas por sus correspondientes aproximaciones en una red no uniforme, obteniéndose el operador en diferencias lineal de segundo orden

$$\mathfrak{H}_q = \sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s)}, \quad (3.9)$$

donde, como se mencionó anteriormente,

$$x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3, \quad (3.10)$$

$\sigma(s) := \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$, y $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$.

Nota 3.1.2. En general, σ no es un polinomio en x pero, si la red es de tipo lineal, i.e. $c_1 c_2 = 0$ no siendo ambos cero, entonces σ es un polinomio en x de grado a lo más 2.

De hecho, si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios, esta satisface la relación

$$\mathfrak{H}_q P_n(s) = [n]_q \left\{ \alpha_q(n-1) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\} P_n(s), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

donde, como antes,

$$\alpha_q(n) := \frac{q^{\frac{n}{2}} + q^{-\frac{n}{2}}}{2}, \quad (3.12)$$

y

$$[s]_q := \frac{q^{\frac{s}{2}} - q^{-\frac{s}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.13)$$

Además, dicha SP es ortogonal respecto a cierta función peso ρ soportada sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, i.e.

$$\sum_{s \in \Omega} P_n(s) P_m(s) \rho(s) \nabla x_1(s) = d_n^2 \delta_{n,m}, \quad \Delta s = 1, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Asimismo, como en los casos anteriores, la función peso ρ satisface tanto ciertas condiciones de contorno como una ecuación en diferencias de tipo Pearson

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s)\nabla x_1(s). \quad (3.15)$$

Nota 3.1.3. Se recuerda que las autofunciones polinómicas del operador lineal $\mathfrak{H}_\Delta$ son las denominadas polinomios Δ -clásicos, y las autofunciones polinómicas del operador lineal $\mathfrak{H}_q$ son los q -polinomios.

Un hecho importante relativo a dichos operadores es el carácter hipergeométrico de estos, i.e., si y es una autofunción del operador lineal $\mathfrak{H}$, entonces $y_m = y^{(m)}$ es una autofunción del operador diferencial lineal

$$\mathfrak{H}_m := \sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} + (\tau(x) + m\sigma'(x)) \frac{d}{dx}.$$

Si y es una autofunción del operador lineal $\mathfrak{H}_\Delta$, entonces $y_m = \Delta^m y$ es una autofunción del operador en diferencias lineal

$$\mathfrak{H}_{\Delta, m} := \sigma(s) \Delta \nabla + (\tau(s+m) + \sigma(s+m) - \sigma(s)) \Delta.$$

Finalmente, si y es una autofunción del operador lineal $\mathfrak{H}_q$, entonces $y_m = \Delta^{(m)} y$ es una autofunción del operador en diferencias lineal

$$\mathfrak{H}_{q, m} := \sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x(s)} + \left(\tau(s+k) \frac{\Delta x(s+k-\frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)} + \frac{\sigma(s+k) - \sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)} \right) \frac{\Delta}{\Delta x(s)}.$$

De ahora en adelante, se estudiarán algunas propiedades relacionadas con el operador q -Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$, sus soluciones, y algunas de sus propiedades algebraicas más relevantes. Teniendo en cuenta la definición de los operadores Δ y ∇ , se puede reescribir $\mathfrak{H}_q$ como sigue

$$\mathfrak{H}_q = \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\left(\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s) \right) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} - \sigma(s) \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right). \quad (3.16)$$

Análogamente, se puede reescribir la ecuación en diferencias de tipo Pearson (3.15) como

$$\sigma(s+1)\rho(s+1) = \left(\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s) \right) \rho(s). \quad (3.17)$$

Se combinan (3.16) y (3.17), se obtiene la representación simétrica o autoconjugada de (3.9)

$$\mathfrak{H}_q = \left[\frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \rho_1(s) \right] \frac{\Delta}{\Delta x(s)}, \quad (3.18)$$

donde $\rho_0(s) := \rho(s)$ y $\rho_k(s) := \rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1)$ para cada entero k .

Esta representación del operador en diferencias lineal (3.9) es una de las claves para definir el operador de Rodrigues a través de el cual se podrán unificar todas las representaciones de las familias clásicas.

Nota 3.1.4. *Análogamente, un cálculo directo conduce a las siguientes representaciones simétricas para (3.1) y (3.5)*

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left[\rho_1(x) \frac{d}{dx} \right], \quad (3.19)$$

donde $\rho_0(x) := \rho(x)$ y $\rho_k(x) := \rho_{k-1}(x)\sigma(x)$, para cada número entero k .

Y

$$\mathfrak{H}_\Delta = \frac{1}{\rho(s)} \nabla \left[\rho_1(s) \Delta \right], \quad (3.20)$$

donde $\rho_0(s) := \rho(s)$ y $\rho_k(s) := \rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1)$ para cada número entero k .

De hecho, tomando $k = 0$ en (2.32), uno puede escribir las autofunciones polinómicas de $\mathfrak{H}_q$ como

$$P_n(s) := \left[\frac{B_n}{\rho_0(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \rho_1(s) \right] \left[\frac{1}{\rho_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \rho_2(s) \right] \cdots \left[\frac{1}{\rho_{n-1}(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \rho_n(s) \right], \quad (3.21)$$

donde $B_n \neq 0$, $n = 0, 2, \dots$

3.2. El operador de Rodrigues

Las expresiones obtenidas en la sección previa para el q -Hamiltoniano (3.18) y sus autofunciones polinómicas (3.21), sugieren que se considere un nuevo operador el cual se denominará *operador de Rodrigues*.

Definición 3.2.1. *Dadas las funciones σ , ρ , donde ρ está soportada sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, y una red $x(s) \equiv x$, se define el k -ésimo operador de Rodrigues asociado a la terna (σ, ρ, x) como*

$$R_0(\sigma, \rho, x) := I, \quad R_1(\sigma, \rho, x) := \frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \rho_1(s) I, \quad (3.22)$$

$$R_k(\sigma, \rho, x) := R_1(\sigma, \rho, x) \circ R_{k-1}(\sigma, \rho_1, x_1), \quad k = 2, 3, \dots$$

donde $\rho_1(s) = \sigma(s+1)\rho(s+1)$ e I representa al operador identidad.

Para simplificar la notación, se denotará por $R_k(\rho, x)$ al operador $R_k(\sigma, \rho, x)$. Además, teniendo en cuenta la correspondencia entre el operador desplazamiento, el operador en diferencias finitas y el operador en q -diferencia, es sencillo comprobar que, en el caso clásico estándar

$$R_1(\rho, x) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \rho_1(x) I,$$

y en el caso Δ -clásico

$$R_1(\rho, x) = \frac{1}{\rho(s)} \nabla \rho_1(s) I.$$

Con esta definición, es claro que el operador (3.9) puede reescribirse como sigue

$$\mathfrak{H}_q = R_1(\rho, x)\Delta^{(1)}, \quad (3.23)$$

y sus autofunciones polinómicas como

$$P_n(s) = B_n R_n(\rho, x)[1], \quad B_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

Además, este es el camino que permite escribir tanto los operadores lineales $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\Delta$, y $\mathfrak{H}_q$, como sus autofunciones polinómicas de una forma unificada.

Ahora, se considerarán algunas propiedades relativas al operador de Rodrigues

Lema 3.2.1. *La ecuación en diferencias de tipo Pearson (3.14) puede ser reescrita como sigue*

$$R_1(\rho, x)[1] = \tau(s). \quad (3.25)$$

Lema 3.2.2. *Sean σ , ρ y x como antes tales satisfacen la ecuación de tipo Pearson (3.15), o equivalentemente (3.17), entonces para cada número entero k , se tiene la siguiente identidad*

$$\frac{\rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} = \frac{\sigma(s+k) + \tau(s+k)\nabla x_1(s+k)}{\sigma(s+1)}.$$

Prueba: La prueba se realizará primero por inducción para $k > 0$ y posteriormente por inducción para $k < 0$.

El caso $k = 0$ es directo ya que es la ecuación de tipo Pearson. Si se supone la ecuación probada para $k - 1$, se pasará a demostrarla para k :

Dado que $\rho_k(s) = \rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1)$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} &= \frac{\rho_{k-1}(s+2)\sigma(s+2)}{\rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1)} \quad (\text{aplicando inducción para } k-1 \text{ y tomando } s \rightarrow s+1) \\ &= \frac{\sigma((s+1)+(k-1)) + \tau((s+1)+(k-1))\nabla x_1((s+1)+(k-1))}{\sigma((s+1)+1)} \frac{\sigma(s+2)}{\sigma(s+1)} \\ &= \frac{\sigma(s+k) + \tau(s+k)\nabla x_1(s+k)}{\sigma(s+1)}. \end{aligned}$$

Si ahora $k \leq 0$, supónganse que el resultado se probó para $k+1 \leq 0$, se pasará a probarlo para $k < 0$:

Dado que $\rho_k(s+1)\sigma(s+1) = \rho_{k+1}(s)$,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} &= \frac{\rho_{k+1}(s)\sigma(s)}{\rho_{k+1}(s-1)\sigma(s+1)} \quad (\text{Aplicando inducción para } k+1 \text{ y tomando } s \rightarrow s-1) \\ &= \frac{\sigma((s-1)+(k+1)) + \tau((s-1)+(k+1))\nabla x_1((s-1)+(k+1))}{\sigma((s-1)+1)} \frac{\sigma(s)}{\sigma(s+1)} \\ &= \frac{\sigma(s+k) + \tau(s+k)\nabla x_1(s+k)}{\sigma(s+1)}. \end{aligned}$$

□

Otra consecuencia importante es la siguiente:

Lema 3.2.3. *Para cualesquiera números enteros, n, k , $0 \leq k \leq n$, existe una constante, $C_{n,k}$, tal que*

$$\Delta^{(k)} P_n(s) = C_{n,k} R_{n-k}(\rho_k, x_k)[1]. \quad (3.26)$$

Prueba: Se probará por inducción sobre k .

- Si $k = 1$, teniendo en cuenta (3.11), (3.23), (3.24), y desarrollando P_n en (3.26) se obtiene que

$$R_1(\rho, x)[\Delta^{(1)}P_n(s)] = -\lambda_n R_1(\rho, x)[R_{n-1}(\rho_1, x_1)[1]],$$

donde λ_n es una constante. Así, por unicidad, existe una constante $C_{n,1}$ tal que

$$\Delta^{(1)}P_n(s) = C_{n,1}R_{n-1}(\rho_1, x_1)[1].$$

- Si se supone el resultado cierto para cada $1 \leq k \leq m$, se pasará a probar el resultado para $k = m + 1 \geq 2$:

Por hipótesis de inducción, se conoce la existencia de una constante, $C_{n,m}$, tal que

$$\Delta^{(m)}P_n(s) = C_{n,m}R_{n-m}(\rho_m, x_m)[1],$$

luego

$$\Delta^{(m+1)}P_n(s) = \frac{\Delta}{\Delta x_m(s)} \Delta^{(m)}P_n(s) = C_{n,m} \frac{\Delta}{\Delta x_m(s)} R_{n-m}(\rho_m, x_m)[1].$$

De nuevo, por hipótesis de inducción, tomándose $\rho \equiv \rho_m$, $x \equiv x_m$, $n \equiv n - m$, y $k = 1$, se obtiene que existe una constante $E_{m,1}$ tal que

$$\frac{\Delta}{\Delta x_m(s)} R_{n-m}(\rho_m, x_m)[1] = E_{m,1} R_{n-m-1}(\rho_{m+1}, x_{m+1})[1].$$

Por tanto tomando $C_{n,m+1} = C_{n,m}E_{m,1}$, se obtiene que

$$\Delta^{(m+1)}P_n(s) = C_{n,m+1}R_{n-(m+1)}(\rho_{m+1}, x_{m+1})[1],$$

y el resultado queda demostrado. □

Nota 3.2.1. Teniendo en cuenta el carácter hipergeométrico de las familias clásicas [115], se conoce la ecuación de tipo Pearson que satisface ρ_m , y la ecuación en diferencias lineal de segundo orden que satisface $\Delta^{(m)}P_n(s)$, para cada $m, n = 0, 1, \dots$

3.3. El Teorema de caracterización para los q -polinomios

Para conseguir dicho propósito, se necesita redefinir el concepto de polinomio q -clásico (o q -polinomio). Además, dado que las medidas están soportadas sobre el eje real, se pasa a escribir Ω como el intervalo¹ $[a, b]$.

Definición 3.3.1. Se dirá que la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios sobre la red

$$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3, \quad (3.27)$$

si satisfacen (3.14) donde

(i) ρ es una solución de la ecuación de tipo Pearson

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s)\nabla x_1(s). \quad (3.28)$$

¹Si $|a| = \infty$ (resp. $|b| = \infty$) entonces se escribirá dicho intervalo como $(a, b]$ (resp. $[a, b)$).

(ii) $\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ es un polinomio en x de grado a lo más 2.

(iii) τ es un polinomio en x de grado 1.

Además, se dirá que la terna (σ, ρ, x) es una **terna q -clásica** si satisface (i)-(iii).

Dicha definición contiene a otras anteriores definiciones relativas a sucesiones de q -polinomios (véase [10] y las referencias contenidas en ésta) dadas sobre una red de tipo lineal ya que, en ese caso, $\nabla x_1(s)$ es un polinomio de grado 1, así

$$\sigma(s) = \left(\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s) \right) - \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s),$$

es un polinomio en $x(s)$ de grado, a lo más, 2.

Lema 3.3.1. *Dados un polinomio π y un número entero k , $\pi(x_k(s)) + \pi(x_k(s-1))$ es un polinomio en x_{k-1} de grado $\text{grd}(\pi)$.*

Prueba: Por la definición de la red $x(s) \equiv x$, se sabe que

$$x_k(s) = x_1\left(s + \frac{k-1}{2}\right),$$

por tanto, basta considerar el caso $k = 1$. Se probará el resultado mediante el proceso de inducción sobre $m = \text{grd} \pi$:

- Si $m = 1$ el resultado es directo.
- Si $m \geq 2$, entonces $x_1^m(s) + x_1^m(s-1)$ puede expresarse cómo sigue
 $(x_1^{m-1}(s) + x_1^{m-1}(s-1))(x_1(s) + x_1(s-1)) - x_1(s)x_1(s-1)(x_1^{m-2}(s) + x_1^{m-2}(s-1)).$

Y dado que

$$x_1(s)x_1(s-1) = x^2(s) + ([2] - 2)c_3x(s) + (k_q - 2)^2c_1c_2 - (k_q - 2)c_3^2,$$

es un polinomio en x de grado 2 se deduce, via inducción, que la función anterior es un polinomio en x de grado m , de ahí que el resultado quede probado. $\square$

Proposición 3.3.1. *Si (σ, ρ, x) es una terna q -clásica, entonces dados un número entero k y un polinomio π , la función*

$$R_1(\rho_k, x_k)[\pi(x_{k+1}(s))],$$

es un polinomio en x_k de grado $\text{grd}(\pi) + 1$.

Prueba: Por hipótesis, se sabe que $\hat{\sigma}(s) := \sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ y τ son polinomios en x de grados, a lo más, 2 y exactamente 1, respectivamente. Teniendo en cuenta además el Lema 3.2.2, se tiene

$$\begin{aligned} R_1(\rho_k, x_k)[1] &= \frac{1}{\rho_k(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_{k+1}(s)} [\rho_{k+1}(s)] \\ &= \frac{1}{\rho_k(s)} \frac{\sigma(s+1)\rho_k(s+1) - \sigma(s)\rho_k(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} \\ &= \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s+1)\rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} - \sigma(s) \right) \\ &= \frac{\sigma(s+k) + \tau(s+k)\nabla x_1(s+k) - \sigma(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} \\ &= \frac{\hat{\sigma}(s+k) - \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{2}\tau(s+k)\nabla x_1(s+k) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)}{\nabla x_{k+1}(s)}, \end{aligned}$$

es un polinomio en x_k de grado 1, de hecho

$$R_1(\rho_k, x_k)[1] = \left\{ \alpha_q(2k)\tau' + [2k]_q \frac{\widehat{\sigma}''}{2} \right\} (x_k(s) - c_3) + \alpha_q(k)(\tau(0) + c_3\tau') + [k]_q(\widehat{\sigma}'(0) + c_3\widehat{\sigma}''), \quad (3.29)$$

siendo

$$\widehat{\sigma}(x) = \frac{\widehat{\sigma}''}{2}x^2 + \widehat{\sigma}'(0)x + \widehat{\sigma}(0), \quad y \quad \tau(x) = \tau'x + \tau(0), \quad (3.30)$$

los desarrollos de Taylor de $\widehat{\sigma}$ y τ , respectivamente.

Nota 3.3.1. De ahora en adelante, se denotará por $\Theta(s)$ a la expresión $\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s)$.

Además, para cada m y k números enteros, $m \geq 2$, se tiene que, teniendo en cuenta el Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned} R_1(\rho_k(s), x_k(s))[\pi(x_{k+1}(s))] &= \\ &= \frac{(\sigma(s+k) + \tau(s+k)\nabla x_1(s+k))}{\nabla x_{k+1}(s)} \pi(x_{k+1}(s)) - \frac{\sigma(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} \pi(x_{k+1}(s-1)) \\ &= \frac{\Theta(s+k)}{\nabla x_{k+1}(s)} \pi(x_{k+1}(s)) - \frac{\sigma(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} \pi(x_{k+1}(s-1)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta función será un polinomio en x_k si y sólo si la función

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s + \frac{k}{2})}{\nabla x_1(s)} \pi(x_1(s)) - \frac{\sigma(s - \frac{k}{2})}{\nabla x_1(s)} \pi(x_{-1}(s)) \\ = \frac{(\sigma(s + \frac{k}{2}) + \tau(s + \frac{k}{2})\nabla x_{k+1}(s))}{\nabla x_1(s)} \pi(x_1(s)) - \frac{\sigma(s - \frac{k}{2})}{\nabla x_1(s)} \pi(x_{-1}(s)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

es un polinomio en x . Pero dicha función es igual a

$$\frac{[\Theta(s + \frac{k}{2}) - \sigma(s - \frac{k}{2})]}{\nabla x_1(s)} \pi(x_1(s)) + \frac{\sigma(s - \frac{k}{2})}{\nabla x_1(s)} [\pi(x_1(s)) - \pi(x_{-1}(s))],$$

y también es igual a

$$\frac{[\Theta(s + \frac{k}{2}) - \sigma(s - \frac{k}{2})]}{\nabla x_1(s)} \pi(x_{-1}(s)) + \frac{\Theta(s + \frac{k}{2})}{\nabla x_1(s)} [\pi(x_1(s)) - \pi(x_{-1}(s))].$$

Por tanto, será igual a la media aritmética de ambas. Usando el Lema 3.3.1 y la relación

$$\Theta(s + \frac{k}{2}) - \sigma(s - \frac{k}{2}) = q_2(s)\nabla x_1(s),$$

donde

$$q_2(s) = \left\{ \alpha_q(2k)\tau' + [2k]_q \frac{\widehat{\sigma}''}{2} \right\} (x(s) - c_3) + \alpha_q(k)(\tau(0) + c_3\tau') + [k]_q(\widehat{\sigma}'(0) + c_3\widehat{\sigma}''),$$

es un polinomio en x de grado a lo más 2, se deduce que (3.32) es un polinomio en x de grado a lo más $\text{grd}(\pi) + 1$. Pero, de nuevo, un cálculo sencillo desvela que el coeficiente de $x^{\text{grd}(\pi)+1}$ es

$$\alpha_q(m+2k)\tau' + [m+2k]_q \frac{\widehat{\sigma}''}{2} \neq 0, \quad m = \text{grd } \pi.$$

□

Teniendo en cuenta estos resultados en conjunto, se pueden enunciar los que serán resultados preliminares del primer Teorema principal de esta memoria.

Teorema 3.1. *Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ sobre la red x tal que se satisfacen las siguientes condiciones de contorno:*

$$x^k(a)x_{-1}^l(a)\sigma(a)\rho(a) = x^k(b)x_{-1}^l(b)\sigma(b)\rho(b) = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (3.33)$$

Entonces, la sucesión $\{\Delta^{(1)}P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ_1 sobre x_1 .

Además, el recíproco es cierto si se tiene la condición (3.33).

Prueba: Considérese una sucesión de q -polinomios, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto a la función peso ρ sobre x , entonces fijado un número entero no negativo n , para cada $1 \leq k < n$, por la Proposición 3.3.1 se sabe que $Q_k(s) := R_1(\rho, x)P_{k-1}(x_1(s))$ es un polinomio en x de grado a lo más k , luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)Q_k(s)\rho(s)\nabla x_1(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)\{R_1(\rho, x)P_{k-1}(x_1(s))\}\rho(s)\nabla x_1(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)\nabla[\rho_1(s)P_{k-1}(x_1(s))]. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Leibniz

$$\nabla[f(s)g(s)] = \nabla[f(s)]g(s) + f(s-1)\nabla[g(s)].$$

Se obtiene la siguiente formula de suma por partes

$$\sum_{s=a}^{b-1} f(s)\nabla[g(s)] = f(s)g(s)\Big|_{s=a-1}^{s=b-1} - \sum_{s=a}^{b-1} \nabla[f(s)]g(s-1). \quad (3.34)$$

Obteniéndose que

$$\begin{aligned} 0 &= P_n(s+1)\rho_1(s)P_{k-1}(x_1(s))\Big|_{s=a-1}^{s=b-1} - \sum_{s=a}^{b-1} \nabla P_n(s+1)\rho_1(s)P_{k-1}(x_1(s)) \quad (\text{from (3.20)}) \\ &= P_n(s)\rho(s)\sigma(s)P_{k-1}(x_{-1}(s))\Big|_{s=a}^{s=b} - \sum_{s=a}^{b-1} \Delta P_n(s)\rho_1(s)P_{k-1}(x_1(s)) \quad (\Delta x(s) = \nabla x_2(s)) \\ &= P_n(s)\sigma(s)\rho(s)P_{k-1}(x_{-1}(s))\Big|_{s=a}^{s=b} - \sum_{s=a}^{b-1} \Delta^{(1)}[P_n(s)]P_{k-1}(x_1(s))\rho_1(s)\nabla x_2(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\Delta^{(1)}P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una SPO respecto la función peso ρ_1 sobre x_1 .

A continuación, se comprobará que ρ_1 satisface la ecuación de tipo Pearson análoga a (3.28) sobre x_1

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[\sigma(s)\rho_1(s)]}{\rho_1(s)} &= \frac{\sigma(s+1)\rho_1(s+1)}{\rho_1(s)} - \sigma(s) && (P_n \text{ clásico}) \\ &= \sigma(s+1) + \tau(s+1)\nabla x_1(s+1) - \sigma(s) && (P_n \text{ clásico}) \\ &= \hat{\sigma}(s+1) - \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{2}\tau(s+1)\nabla x_1(s+1) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s), \end{aligned}$$

donde $\hat{\sigma}(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ es un polinomio en x_1 de grado a lo más 2. Teniendo en cuenta (3.29) para $k = 1$, se obtiene que

$$\frac{\Delta[\sigma(s)\rho_1(s)]}{\rho_1(s)} = \hat{\tau}_1(s)\nabla x_2(s),$$

donde $\hat{\tau}_1$ es un polinomio en x_1 de grado a lo más 1. Además utilizando la última expresión se obtiene que

$$\sigma(s) + \frac{1}{2}\hat{\tau}_1(s)\nabla x_2(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}(s+1) + \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{2}\tau(s+1)\nabla x_1(s+1) - \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)\right),$$

es un polinomio en x_1 de grado a lo más 2, y por tanto dicha implicación es cierta. Para ver el recíproco se parte de la existencia de dos polinomios en la variable x_1 , $\hat{\sigma}$ de grado a lo más dos, y τ_1 de grado 1, tales que

$$\Delta[\sigma(s)\rho_1(s)] = \tau_1(s)\rho_1(s)\nabla x_2(s),$$

siendo $\sigma(s) = \hat{\sigma}(s) - \frac{1}{2}\tau_1(s)\nabla x_2(s)$. Así, bastará probar que

$$\tau(s) := \frac{\nabla x(s)}{\nabla x_1(s)} \left(\tau_1(s-1) - \frac{\nabla \sigma(s)}{\nabla x(s)} \right),$$

y $\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ son polinomios en x de grados a lo más 1 y 2, respectivamente. Lo cual se deduce de un cálculo directo ya que

$$\tau(s) = \frac{\hat{\sigma}(s-1) - \hat{\sigma}(s)}{\nabla x_1(s)} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1(s)\nabla x_2(s) + \tau_1(s-1)\nabla x(s)}{\nabla x_1(s)},$$

y

$$\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}(s-1) + \hat{\sigma}(s) - \frac{1}{2}(\tau_1(s)\nabla x(s+1) - \tau_1(s-1)\nabla x(s))\right),$$

son polinomios en $x(s)$ de los grados que se indican. $\square$

Teorema 3.2. Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ sobre x tal que

$$x^k(a)x_{-1}^l(a)\rho(a) = x^k(b)x_{-1}^l(b)\rho(b) = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (3.35)$$

Entonces, tomando $P_{-1} = 0$, la sucesión de polinomios $\{R_n(\rho_{-1}, x_{-1})[1]\}_{n \geq 0}$ constituye una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto a la función peso $\rho_{-1}(s) = \rho(s-1)/\sigma(s)$ sobre x_{-1} . Además, el recíproco es cierto si se satisfacen las condiciones de contorno (3.33).

Prueba: Considérese una sucesión de q -polinomios, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto a la función peso ρ sobre x .

Nota 3.3.2. Teniendo en cuenta el Lema 3.2.3 para $k = 0$ y que

$$R_1(\rho_{-1}, x_{-1}) \circ R_n(\rho, x) = R_{n+1}(\rho_{-1}, x_{-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

bastará probar el dicho resultado para $R_1(\rho_{-1}, x_{-1})[P_n(x(s))]$ que es, según la Proposición 3.3.1, un polinomio en x_{-1} de grado $n + 1$.

Fijado un número entero no negativo n , para cada $1 \leq k < n$, sea Q_k un polinomio de grado k tal que $\nabla Q_{k+1}(x_1(s)) = Q_k(s) \nabla x_1(s)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s) Q_k(s) \rho(s) \nabla x_1(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s) \nabla Q_{k+1}(x_1(s)) \rho(s). \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Leibniz y teniendo en cuenta las condiciones de contorno (3.35) se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=a}^{b-1} \nabla[\rho(s) P_n(s)] Q_{k+1}(x_{-1}(s)) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} R_1(\rho_{-1}, x_{-1})[P_n(s)] Q_{k+1}(x_{-1}(s)) \rho_{-1}(s) \nabla x(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{R_1(\rho_{-1}(s), x_{-1}(s))[P_n(s)]\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ_{-1} sobre la red x_{-1} .

A continuación se comprobará que ρ_{-1} satisface la ecuación de tipo Pearson (3.28) sobre x_{-1} .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[\sigma(s) \rho_{-1}(s)]}{\rho_{-1}(s)} &= \frac{\sigma(s+1) \rho_{-1}(s+1)}{\rho_{-1}(s)} - \sigma(s) && (P_n \text{ clásico}) \\ &= \sigma(s-1) + \tau(s-1) \nabla x_1(s-1) - \sigma(s) && (P_n \text{ clásico}) \\ &= \hat{\sigma}(s-1) - \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{2} \tau(s-1) \nabla x_1(s-1) + \frac{1}{2} \tau(s) \nabla x_1(s), \end{aligned}$$

donde $\hat{\sigma}(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2} \tau(s) \nabla x_1(s)$ es un polinomio en x de grado a lo más 2.

Teniendo en cuenta (3.29) para $k = -1$, se obtiene que

$$\frac{\Delta[\sigma(s) \rho_{-1}(s)]}{\rho_{-1}(s)} = \hat{\tau}_{-1}(s) \nabla x(s),$$

donde $\hat{\tau}_{-1}$ es un polinomio en x_{-1} de grado a lo más 1.

Además, utilizando la última expresión se obtiene que

$$\sigma(s) + \frac{1}{2} \hat{\tau}_{-1}(s) \nabla x(s) = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}(s+1) + \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{2} \tau(s+1) \nabla x_1(s+1) - \frac{1}{2} \tau(s) \nabla x_1(s) \right),$$

es un polinomio en x_{-1} de grado a lo más 2, y por tanto dicha implicación es cierta.

Para ver el recíproco se partirá de la existencia de dos polinomios, $\hat{\sigma}$ en x_{-1} de grado a lo más 2, y τ_{-1} en x_{-1} de grado 1, tales que

$$\Delta[\sigma(s) \rho_{-1}(s)] = \tau_{-1}(s) \rho_{-1}(s) \nabla x(s),$$

siendo $\sigma(s) = \hat{\sigma}(s) - \frac{1}{2} \tau_{-1}(s) \nabla x(s)$.

Así que bastará probar que

$$\tau(s) := \frac{\Delta x(s)}{\Delta x_{-1}(s)} \left(\tau_{-1}(s+1) + \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x(s)} \right),$$

y $\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ son polinomios en x de grados a lo más 1 y 2, respectivamente. Lo cual se deduce de un cálculo directo ya que

$$\tau(s) = \frac{\hat{\sigma}(s+1) - \hat{\sigma}(s)}{\Delta x_{-1}(s)} + \frac{1}{2} \frac{\tau_{-1}(s+1)\nabla x(s+1) + \tau_{-1}(s)\nabla x(s)}{\Delta x_{-1}(s)},$$

y

$$\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s) = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}(s+1) + \hat{\sigma}(s) - \frac{1}{2}(\tau_{-1}(s+1)\nabla x(s+1) - \tau_{-1}(s)\nabla x(s)) \right).$$

□

Nota 3.3.3.

(i) Es claro que la relación entre lo establecido en los Teoremas 3.1 y 3.2 viene dada por la siguiente relación entre operadores

$$R_1(\rho_{-1}, x_{-1}) \circ R_n(\rho, x) = R_{n+1}(\rho_{-1}, x_{-1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Por tanto $R_1(\rho_{-1}, x_{-1})$ es, en cierta manera salvo una constante, el operador inverso de $\Delta^{(1)}$.

(ii) Si

$$\sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)P_m(s)\rho(s)\nabla x_1(s) = 0,$$

y las condiciones de contorno (3.33) se satisfacen, entonces para cada número entero k

$$\sum_{s=a-k}^{b-k-1} \Delta^{(k)} P_n(s) \Delta^{(k)} P_m(s) \rho_k(s) \nabla x_{k+1}(s) = 0,$$

donde si $k > 0$

$$\Delta^{(-k)} := R_k(\rho_{-k}, x_{-k}), \quad (3.36)$$

el cual es, de nuevo en cierto sentido salvo una constante, el inverso del operador $\Delta^{(k)}$.

Teorema 3.3. Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ que es completa en $\ell^2([a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es q -clásica y se satisfacen las condiciones de contorno

$$x^k(a)x_{-1}(a)^l\sigma(a)\rho(a) = x^k(b)x_{-1}(b)^l\sigma(b)\rho(b) = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

(ii) $\{\Delta^{(1)}P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a cierta función peso $\tilde{\rho}$ la cual satisface las siguientes condiciones de contorno:

$$x^k(a)x_{-1}(a)^l\tilde{\rho}(a-1) = x^k(b)x_{-1}(b)^l\tilde{\rho}(b-1) = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

De hecho, $\tilde{\rho}(s) = \rho(s+1)\sigma(s+1)$.

Antes de demostrar este resultado es importante recalcar que es claro que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ es estándar ya que viene definido como

$$\langle f, g \rangle := \sum_{s=a}^{b-1} f(s) \overline{g(s)} \rho(s) \nabla x_1(s).$$

Además, el Teorema de Luisin² [119] permite garantizar la completitud de dicha sucesión de polinomios ortogonales respecto a una medida cuya masa está soportada sobre un conjunto compacto, así el Teorema 3.3 no tiene excesivas restricciones y por tanto puede ser considerarse un resultado análogo al Teorema de Hahn sobre la red general x . Tendiendo en cuenta este comentario, se pasará a probar el resultado.

Prueba: Por supuesto (i) $\Rightarrow$ (ii) es una consecuencia directa del Teorema 3.1, y nótese que en esta implicación no se ha necesitado la completitud de la sucesión de polinomios.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\{\Delta^{(1)} P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso $\tilde{\rho}$ sobre x_1 y supónganse que las condiciones de contorno de (ii) se satisfacen, entonces fijado $k \geq 1$, para todo $n > k$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= P_n(s) \tilde{\rho}(s-1) P_{k-1}(x_1(s)) \Big|_{s=a}^{s=b} - \sum_{s=a}^{b-1} \Delta^{(1)}[P_n(s)] P_{k-1}(x_1(s)) \tilde{\rho}(s) \nabla x_2(s) \\ &= P_n(s) \tilde{\rho}(s-1) P_{k-1}(x_1(s)) \Big|_{s=a}^{s=b} - \sum_{s=a}^{b-1} \Delta P_n(s) \tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s)) \quad (3.20) \\ &= P_n(s+1) \tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s)) \Big|_{s=a-1}^{s=b-1} - \sum_{s=a}^{b-1} \nabla P_n(s+1) \tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s)). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de suma por partes (3.34) se obtiene que

$$\sum_{s=a}^{b-1} P_n(s) \nabla [\tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s))] = 0, \quad n = k+1, k+2, \dots \quad (3.37)$$

Luego la función

$$\frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla [\tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s))]}{\nabla x_1(s)},$$

es ortogonal a P_n respecto a la función peso ρ sobre x para $n > k$. Por otro lado, por hipótesis, la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es completa sobre el espacio $\ell^2([a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$, luego

$$\frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla [\tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s))]}{\nabla x_1(s)} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{k,j} P_j(x(s)). \quad (3.38)$$

Teniendo en cuenta (3.37), esta función es un polinomio de grado k ya que, si $j > k$

$$\beta_{k,j} = \frac{1}{d_j^2} \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s) \frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla [\tilde{\rho}(s) P_{k-1}(x_1(s))]}{\nabla x_1(s)} \rho(s) \nabla x_1(s) = 0.$$

²Sea f una función compleja medible sobre X , A un conjunto de medida finita con $f(x) = 0$ si $x \notin A$, y $\epsilon > 0$. Entonces existe $g \in C_c(X)$ tal que

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

Además, se puede tomar con $\sup_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |g(x)|$.

Y $\beta_{k,k} \neq 0$ dado que $\{\Delta P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una SPO. Así,

$$\frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla[\tilde{\rho}(s)P_{k-1}(x_1(s))]}{\nabla x_1(s)} = \sum_{j=0}^k \beta_{k,j} P_j(x(s)). \quad (3.39)$$

Tomando $k = 1$ con $P = 1$ en (3.39), se define el polinomio $\hat{\tau}$ de grado 1 en x como

$$\hat{\tau}(s) := \frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla[\tilde{\rho}(s)]}{\nabla x_1(s)},$$

y σ como

$$\sigma(s) := \frac{\tilde{\rho}(s-1)}{\rho(s)}.$$

Entonces se obtiene que $\tilde{\rho}(s) = \sigma(s+1)\rho(s+1)$ y

$$\nabla[\sigma(s+1)\rho(s+1)] = \Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \rho(s)\hat{\tau}(s)\nabla x_1(s).$$

Es decir, se obtiene la ecuación de tipo Pearson. Pero para concluir la prueba se necesita probar que $\sigma(s) + \frac{1}{2}\hat{\tau}(s)\nabla x_1(s)$ es un polinomio en x de grado, a lo más, 2. Tomando, $k = 2$ en (3.39) con $P(x) = x$ se obtiene que

$$\begin{aligned} Q_2(s) &= \frac{1}{\rho(s)} \frac{\nabla[\tilde{\rho}(s)x_1(s)]}{\nabla x_1(s)} = \frac{(\sigma(s) + \hat{\tau}(s)\nabla x_1(s))x_1(s) - \sigma(s)x_1(s-1)}{\nabla x_1(s)} \\ &= \sigma(s) + \hat{\tau}(s)x_1(s), \end{aligned}$$

donde Q_2 es un polinomio en x de grado a lo más 2 y aplicando técnicas análogas a las consideradas anteriormente se deduce que

$$\sigma(s) + \frac{1}{2}\hat{\tau}(s)\nabla x_1(s) = Q_2(s) - \hat{\tau}(s)\frac{x_1(s) + x_1(s-1)}{2},$$

es un polinomio en x de grado a lo más 2 y por lo tanto $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios que satisfacen las condiciones de contorno de (i), y así el resultado queda probado. $\square$

A continuación se enunciará un resultado que permitirá demostrar uno de los resultados más relevantes de esta memoria.

Teorema 3.4. Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ sobre la red

$$x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3,$$

y sea σ tal que se satisfacen las condiciones de contorno (3.35). Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios.
2. $\{\Delta^{(1)} P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto a la función peso $\rho_1(s) = \sigma(s+1)\rho(s+1)$ sobre la red x_1 , donde ρ satisface la ecuación de Pearson (3.28).
3. Para cada número entero k , la sucesión $\{R_n(\rho_k, x_k)[1]\}_{n \geq 0}$ constituye una sucesión de q -polinomios respecto a la función peso ρ_k sobre la red x_k , donde $\rho_0(s) = \rho(s)$, $\rho_k(s) = \rho_{k-1}(s+1)\sigma(s+1)$, y ρ satisface la ecuación de tipo Pearson (3.28).

4. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ *satisface la siguiente ecuación en diferencias lineal de segundo orden*

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} + \lambda_n P_n(s) = 0, \quad (3.40)$$

donde $\hat{\sigma}(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ y τ son polinomios en x de grados a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ_n es una constante que no depende de s .

5. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ *puede expresarse en términos del operador de Rodrigues de la forma*

$$P_n(s) = B_n R_n(\rho, x)[1] = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)} [\rho_n(s)], \quad (3.41)$$

donde B_n es una constante no nula.

6. (Segunda relación de estructura) *Existen sucesiones de números complejos, $\{e_n\}_n$, $\{f_n\}_n$, y $\{g_n\}_n$, tales que para cada $n \geq 0$, se satisface la siguiente relación*

$$MP(s) := \frac{P(s+1) + P(s)}{2} = e_n \frac{\Delta P_{n+1}(s)}{\Delta x(s)} + f_n \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} + g_n \frac{\Delta P_{n-1}(s)}{\Delta x(s)}, \quad (3.42)$$

donde $e_n \neq 0$, $g_n \neq \gamma_n$ para cada $n \geq 0$, y γ_n es el coeficiente correspondiente de la siguiente relación de recurrencia a tres términos [115]

$$x(s)P_n(s) = \alpha_n P_{n+1}(s) + \beta_n P_n(s) + \gamma_n P_{n-1}(s), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.43)$$

Nota 3.3.4. Si se considera una red de tipo lineal, este resultado es equivalente al obtenido en [10], ya que $\tau(s)\nabla x_1(s)$ es un polinomio en $x(s)$ de grado 2 y $x_k(s) = q^{\alpha_k}x(s) + \delta_k$, donde α_k, δ_k son constantes independientes de s .

Se debe de tener en cuenta que para probar el Teorema 3.4, por los Teoremas 3.1 y 3.2, y sus corolarios y comentarios ya se sabe que $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$.

Proposición 3.3.2. ((1) $\rightarrow$ (4)). Si la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios respecto a la función peso ρ sobre x satisfaciendo las condiciones de contorno (3.35), entonces $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface la ecuación en diferencias lineal de segundo orden de tipo hipergeométrico (3.40).

Prueba: Por el Lema 3.3.1 y la Proposición 3.3.1 se sabe que $R_1(\rho, x)\{\Delta^{(1)}P_n(s)\}$ es un polinomio en x de grado n , además por el Teorema 3.1 igualmente es conocido que $\{\Delta^{(1)}P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios respecto la función peso $\rho_1(s) = \sigma(s+1)\rho(s+1)$ sobre $x_1(s) = x(s + \frac{1}{2})$, por lo tanto si se toma $k < n$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=a}^{b-1} Q_k(s) R_1(\rho, x) \{\Delta^{(1)}P_n(s)\} \rho(s) \nabla x_1(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} Q_k(s) \nabla \{\rho_1(s) \Delta^{(1)}P_n(s)\} \stackrel{(3.34)}{=} Q_k(s) \sigma(s) \rho(s) \Delta^{(1)}P_n(s-1) \Big|_{s=a}^{s=b} \\ & \quad - \sum_{s=a}^{b-1} \Delta^{(1)}\{P_n(s)\} \Delta^{(1)}\{Q_k(s)\} \rho_1(s) \nabla x_2(s). \end{aligned}$$

Por hipótesis y el Teorema 3.1, la última expresión vale cero y por lo tanto existe una constante no nula λ_n , independiente de s , tal que

$$R_1(\rho, x) \{\Delta^{(1)}P_n(s)\} = \lambda_n P_n(s),$$

ya que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ sobre x . Por último, usando el hecho de que la expresión anterior es equivalente a la ecuación (3.9) el resultado queda probado. $\square$

(4)→(5): La demostración de este resultado es bien conocida y puede encontrarse en [115, p. 66]. La proposición 3.3.2 es bastante importante ya que permite obtener los q -polinomios de una manera sencilla como soluciones polinómicas de la ecuación en diferencias (3.40). De hecho, dicho resultado permite escribir tales soluciones polinómicas mediante la fórmula de Rodrigues (3.41) [115, 117] o equivalentemente, a través del operador de Rodrigues tomando $k = 0$ en el Lema 3.2.3.

(5)→(1): Tomando $n = 1$ en la fórmula de Rodrigues se obtiene la ecuación de tipo Pearson (3.28) que satisface la función peso ρ .

Proposición 3.3.3. ((6) $\leftrightarrow$ (1)). Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ sobre la red x , definida en (3.27), y sea σ tal que se satisfacen las condiciones de contorno (3.35). Entonces, la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es q -clásica si y sólo si existen sucesiones de números complejos, $\{e_n\}_n$, $\{f_n\}_n$, y $\{g_n\}_n$, tales que la siguiente relación es cierta para cada $n \geq 0$, tomando $P_{-1} = 0$,

$$MP_n(s) = \frac{P_n(s) + P_n(s+1)}{2} = e_n \frac{\Delta P_{n+1}(s)}{\Delta x(s)} + f_n \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} + g_n \frac{\Delta P_{n-1}(s)}{\Delta x(s)},$$

donde $e_n \neq 0$, $g_n \neq \gamma_n$ para cada $n \geq 0$.

Prueba: Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales entonces estos satisfacen una RRTT, i.e. existen sucesiones de números complejos, $\{\alpha_n\}_n$, $\{\beta_n\}_n$, y $\{\gamma_n\}_n$, tales que

$$x(s)P_n(s) = \alpha_n P_{n+1}(s) + \beta_n P_n(s) + \gamma_n P_{n-1}(s). \quad (3.44)$$

Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es q -clásica entonces $\{\Delta^{(1)} P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, y por tanto existen sucesiones de números complejos, $\{\alpha_n^{(1)}\}_n$, $\{\beta_n^{(1)}\}_n$ y $\{\gamma_n^{(1)}\}_n$, tales que

$$x_1(s)\Delta^{(1)} P_n(s) = \alpha_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_{n+1}(s) + \beta_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_n(s) + \gamma_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_{n-1}(s). \quad (3.45)$$

Pero

$$\Delta^{(1)}(x(s)P_n(s)) = x(s)\Delta^{(1)} P_n(s) + P_n(s+1) = x(s+1)\Delta^{(1)} P_n(s) + P_n(s),$$

luego también debe coincidir con su media aritmética, así

$$\Delta^{(1)}(x(s)P_n(s)) = \frac{1}{2} (x(s) + x(s+1)) \Delta^{(1)} P_n(s) + \frac{1}{2} (P_n(s+1) + P_n(s)). \quad (3.46)$$

Por tanto, combinando las expresiones (3.46), (3.44) y (3.45) se obtiene que

$$MP_n(s) = \left(\alpha_n - \frac{[2]_q}{2} \alpha_n^{(1)} \right) \Delta^{(1)} P_{n+1}(s) + f_n \Delta^{(1)} P_n(s) + \left(\gamma_n - \frac{[2]_q}{2} \gamma_n^{(1)} \right) \Delta^{(1)} P_{n-1}(s),$$

donde

$$f_n = \beta_n - \frac{[2]_q}{2} \beta_n^{(1)} + c_3 \left(1 - \frac{[2]_q}{2} \right).$$

Claramente, debido al Teorema de Favard, el coeficiente de $\Delta^{(1)} P_{n-1}(s)$ en esta última relación es distinto de γ_n para cada n .

Recíprocamente, si existen sucesiones de números complejos, $\{e_n\}_n$, $\{f_n\}_n$ y $\{g_n\}_n$, tales que la siguiente relación se cumple para cada $n \geq 0$, tomando $P_{-1} = 0$,

$$MP_n(s) = e_n \frac{\Delta P_{n+1}(s)}{\Delta x(s)} + f_n \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} + g_n \frac{\Delta P_{n-1}(s)}{\Delta x(s)}.$$

Entonces por (3.46) se obtiene que

$$\frac{[2]_q}{2} x_1(s) \Delta^{(1)} P_n(s) = (\alpha_n - e_n) \Delta^{(1)} P_{n+1}(s) + \widehat{\beta}_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_n(s) + (\gamma_n - g_n) \Delta^{(1)} P_{n-1}(s),$$

donde

$$\widehat{\beta}_n^{(1)} = \beta_n - f_n + c_3 \left(1 - \frac{[2]_q}{2} \right).$$

Y, por hipótesis $g_n \neq \gamma_n$, así que por el Teorema de Favard $\{\Delta^{(1)} P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, y por el Teorema 3.3 el resultado queda probado. $\square$

3.4. Ejemplos

A continuación, y para que la lectura de dicha memoria no se haga demasiado tediosa, se presentarán un par de ejemplos. En primer lugar se considerarán los polinomios de Askey-Wilson y a continuación los q -polinomios de Racah.

3.4.1. Los polinomios de Askey-Wilson

Los polinomios de Askey-Wilson – los cuales fueron introducidos por R. Askey y J. Wilson en [32] – se encuentran localizados en el nivel más alto del esquema de q -Askey [85] los cuales pueden ser escritos mediante series hipergeométricas básicas como

$$p_n(x(s); a, b, c, d|q) = \frac{(ab; q)_n (ac; q)_n (ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, aq^s, aq^{-s} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

donde $a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd \notin \{q^m : m \in \mathbb{Z}\}$.

Tales polinomios son autofunciones del operador lineal de segundo orden

$$\mathfrak{H}_q^{AW} = \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\sigma^{AW}(-s) \frac{\Delta}{\Delta x(s)} - \sigma^{AW}(s) \frac{\nabla}{\nabla x(s)} \right), \quad (3.47)$$

donde $x(s) = \frac{1}{2} (q^s + q^{-s})$, i.e. $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_3 = 0$,

$$\sigma^{AW}(s) = -\kappa_q^2 q^{-2s+\frac{1}{2}} (q^s - a)(q^s - b)(q^s - c)(q^s - d),$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = 4q^{1-n}(1 - q^n)(1 - abcdq^{n-1})$.

Aquí, como anteriormente, $\kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$. Con estos parámetros, considérese la siguiente función

$$\rho^{AW}(s) = q^{-2s^2} (a, b, c, d; q)_s (a, b, c, d; q)_{-s}, \quad (3.48)$$

donde $(a; q)_k$ son unos q -análogos de los símbolos de Pochhammer los cuales se definieron en la sección §2.6.

Lema 3.4.1. *La función $\rho^{AW}(s)$ satisface la siguiente ecuación de tipo Pearson:*

$$\sigma^{AW}(s+1) \rho(s+1) = \sigma^{AW}(-s) \rho(s).$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho^{AW}(s+1)}{\rho^{AW}(s)} &= \frac{q^{-2(s+1)^2} (a, b, c, d; q)_{s+1} (a, b, c, d; q)_{-s-1}}{q^{-2s^2} (a, b, c, d; q)_s (a, b, c, d; q)_{-s}} \\
 &= \frac{q^{-4s-2} (1 - aq^s)(1 - bq^s)(1 - cq^s)(1 - dq^s)}{(1 - aq^{-s-1})(1 - bq^{-s-1})(1 - cq^{-s-1})(1 - dq^{-s-1})} \\
 &= \frac{q^{2s} (q^{-s} - a)(q^{-s} - b)(q^{-s} - c)(q^{-s} - d)}{q^{-2s-2} (q^{s+1} - a)(q^{s+1} - b)(q^{s+1} - c)(q^{s+1} - d)} = \frac{\sigma^{AW}(-s)}{\sigma^{AW}(s+1)}.
 \end{aligned}$$

□

Teniendo en cuenta que $\rho_n(s) = \rho_{n-1}(s+1)\sigma(s+1)$ para cada $n = 1, 2, \dots$, siendo $\rho_0(s) = \rho(s)$, un cálculo sencillo da lugar a la siguiente expresión para ρ_n^{AW}

$$\rho_n^{AW}(s) = \kappa_q^{2n} q^{-2s^2 - 2sn - n^2 + \frac{3}{2}n} (a, b, c, d; q)_{s+n} (a, b, c, d; q)_{-s}. \quad (3.49)$$

Luego los polinomios de Askey-Wilson pueden escribirse como

$$p_n(x(s); a, b, c, d|q) = \frac{B_n \kappa_q^{2n} q^{2s^2}}{(a, b, c, d; q)_s (a, b, c, d; q)_{-s}} \nabla^{(n)} \frac{(a, b, c, d; q)_{s+n} (a, b, c, d; q)_{-s}}{q^{2s^2 + 2sn + n^2 - \frac{3}{2}n}}, \quad (3.50)$$

donde $B_n = 2^{-n} \kappa_q^{-n} q^{\frac{n(3n-5)}{4}}$.

Además, dado que tales polinomios satisfacen la relación en q -diferencias

$$\Delta^{(1)} p_n(x(s); a, b, c, d|q) = 2[n]_q (1 - abcdq^{n-1}) p_{n-1}(x_1(s); aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}|q),$$

se obtienen los siguientes coeficientes para la segunda relación de estructura

$$\begin{aligned}
 e_n &= \frac{2[n]_q (1 - abcdq^{n-1})^2 - [2]_q [n+1]_q (1 - abcdq^n)^2}{4[n]_q (1 - abcdq^{n-1})(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})}, \\
 f_n &= \frac{1-q}{4} (a - a^{-1}q^{-1}) - \frac{1}{2} \left(A_n(a, b, c, d|q) + C_n(a, b, c, d|q) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{[2]_q}{2} (A_{n-1}(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}|q) + C_{n-1}(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}|q)) \right), \\
 g_n &= \frac{(1 - abcdq^{n-2})(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})}{4[n]_q (1 - abcdq^{n-1})^2} \left(\frac{2[n]_q (A_{n-1}C_n)(a, b, c, d|q)}{(1 - abcdq^{n-2})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{[2]_q [n-1]_q (A_{n-2}C_{n-1})(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}|q)}{(1 - abcdq^{n-1})^2} \right), \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_n(a, b, c, d|q) &= \frac{(1 - abq^n)(1 - acq^n)(1 - adq^n)(1 - abcdq^{n-1})}{a(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})}, \\
 C_n(a, b, c, d|q) &= \frac{a(1 - q^n)(1 - bcq^{n-1})(1 - bdq^{n-1})(1 - cdq^{n-1})}{(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})}.
 \end{aligned}$$

3.4.2. Los q -polinomios Racah $u_n^{(\alpha, \beta)}(x(s), a, b)$

Dichos polinomios, introducidos en [7, 99, 115], están definidos sobre la red

$$x(s) = [s]_q [s+1]_q = q^{\frac{1}{2}} \kappa_q^{-2} q^s + q^{-\frac{1}{2}} \kappa_q^{-2} q^{-s} - [2]_q \kappa_q^{-2},$$

pueden ser escritos mediante las series hipergeométricas básicas como [27]

$$u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q = D_n {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{\alpha+\beta+n+1}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{\beta+1}, q^{a+b+\alpha+1} \end{matrix} \middle| q, q \right),$$

donde

$$D_n = \frac{q^{-\frac{n}{2}(2a+\alpha+\beta+n+1)}(q^{a-b+1}; q)_n (q^{\beta+1}; q)_n (q^{a+b+\alpha+1}; q)_n}{\kappa_q^{2n}(q; q)_n}.$$

Esta familia de q -polinomios son autofunciones del operador en diferencias lineal de segundo orden

$$\mathfrak{H}_q^{qR} = \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\sigma^{qR}(-s-1) \frac{\Delta}{\Delta x(s)} - \sigma^{qR}(s) \frac{\nabla}{\nabla x(s)} \right), \quad (3.52)$$

donde

$$\sigma^{qR}(s) = [s-a]_q [s+b]_q [s+a-\beta]_q [b+\alpha-s]_q,$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = [n]_q [n+\alpha+\beta+1]_q$. Así, dicha familia de q -polinomios satisface la siguiente identidad

$$\Delta^{(1)} u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q = [\alpha+\beta+n+1]_q u_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x_1(s), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q,$$

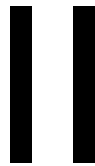
de ahí que los coeficientes de la segunda relación de estructura vengan dados por

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{2[n+\alpha+\beta+1]_q - [2]_q [n+\alpha+\beta+2]_q}{2[2n+\alpha+\beta+1]_q [2n+\alpha+\beta+2]_q} [n+1]_q, \\ f_n &= \beta_n(a, b, \alpha, \beta) - \frac{[2]_q}{2} \beta_n(a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}, \alpha+1, \beta+1), \\ g_n &= \frac{[a+b+\alpha+n]_q [a+b-\beta-n]_q [\alpha+n]_q [\beta+n]_q [b-a+\alpha+\beta+n]_q [b-a-n]_q}{2[\alpha+\beta+2n]_q [\alpha+\beta+2n+1]_q [n+\alpha+\beta+1]_q} \\ &\quad \times (2[n+\alpha+\beta+1]_q - [2]_q [n+\alpha+\beta]_q), \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_n(a, b, \alpha, \beta) &= [a]_q [a+1]_q + \frac{[\alpha+n]_q [b-a+\alpha+\beta+n]_q [a+b-\beta-n]_q [n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q [\alpha+\beta+2n+1]_q} \\ &\quad - \frac{[\alpha+\beta+n+1]_q [a-b+n+1]_q [\beta+n+1]_q [a+b+\alpha+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q [\alpha+\beta+2n+2]_q}. \end{aligned}$$

Una vez que se han establecido las bases de las familias clásicas y las relaciones existentes entre ellas en el próximo capítulo se pasarán a estudiar en detalle los métodos de factorización para las familias de q -polinomios, así como el álgebra dinámica asociada a los polinomios Δ -clásicos. Por último se analizará en detalle los q -polinomios de Racah – proporcionales a los denominados $6j$ -símbolos – así como su relación con la q -álgebra $SU_q(2)$.



Polinomios en redes no uniformes: Los q -polinomios

Los métodos de Factorización

4.1. Introducción

En este capítulo de la memoria se considerarán dos métodos de factorización (MF): el clásico y el de tipo Infeld & Hull – aunque debería denominarse de Darboux por motivos históricos –. El método de factorización clásico está basado en la existencia de los operadores creación y destrucción asociados a cierta ecuación que permite obtener soluciones explícitas de una manera sencilla. Yendo mas allá, Atakishiyev et al. [34, 35, 39] obtuvieron el álgebra de simetrías dinámicas relacionada con dicho método y las ecuaciones en diferencias (o diferenciales) correspondientes. De especial interés fueron los artículos de Yu. F. Smirnov [126, 127, 128] en los cuales mostró la equivalencia del MF clásico y la teoría de Funciones especiales de Nikiforov y Uvarov basada en las ecuaciones en diferencias [115]. Es más, en [126] se menciona que la equivalencia mencionada anteriormente es válida también para el caso de redes no uniformes lo cual se demostró más tarde en [127, 128]. Posteriormente, G. Bangerezako en [42] realizó el estudio de la factorización de tipo Infeld & Hull para los polinomios de Askey-Wilson usando exclusivamente su ecuación en diferencias.

En esta memoria, siguiendo la ideas consideradas en [42] para los polinomios de Askey-Wilson y en [96] para los casos continuo y discreto, se comenzará obteniendo el MF de tipo Infell & Hull para las soluciones polinómicas de las ecuaciones en diferencias en la red no uniforme $x \equiv x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3$ para lo cual se usarán, como fue sugerido en [39, 126], las funciones ortonormales correspondientes a las soluciones polinómicas ya que con éstas el método se puede formular y resolver de una manera más sencilla obteniéndose operadores que dependen de los grados de los polinomios correspondientes, es decir, dependen de n . En ese sentido, el método aquí propuesto es una generalización de los trabajos [42] y [96].

Por otro lado, motivados por la aparición de los q -análogos de los osciladores cuánticos de Macfarlane [98] y Biedenharn [48], Atakishiev, Suslov y otros [35]-[37] explotaron el método de factorización obteniendo nuevos modelos de q -osciladores así como sus correspondientes álgebras dinámicas. En esta memoria se abordará el problema general de encontrar el álgebra dinámica asociada a las familias de polinomios de la tabla de Askey y su q -análogo.

Así, en la sección §4.4 se mostrarán los resultados obtenidos relativos al MF clásico estudiándose el álgebra de simetrías dinámica para la ecuación en diferencias (4.14) sobre la red (4.6). La aproximación que se va a considerar está basada en la siguiente observación, formulada en [34]: Para factorizar una ecuación en diferencias ordinaria, uno debe expresar ésta explícitamente en términos de los operadores desplazamiento $e^{a\partial_s}$, donde a es cierta constante. Por ejemplo, en el caso de la ecuación (4.14) se deben realizar las siguientes sustituciones $\Delta = e^{\partial_s} - 1$ y $\nabla = 1 - e^{-\partial_s}$. Este procedimiento convierte una ecuación en diferencias en un problema de autovalores de un operador en diferencias, el cual viene representado por una combinación lineal de ciertos operadores desplazamientos. Dado que cada término de esta combinación lineal es factorizable (ya que $\exp(\alpha + \beta) \mathbf{A} = \exp \alpha \mathbf{A} \exp \beta \mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es un operador arbitrario), la factorización lineal del conjunto, la cual representa la ecuación en diferencias inicial, se deduce automáticamente.

Finalmente, en la sección 4.5 se considerará el caso Δ -clásico mostrando diversos ejemplos dentro de los polinomios ortogonales Δ -clásicos (polinomios de Kravchuk, Charlier, Meixner). Para más información véase [36, 41] y las referencias de éstas.

Nota 4.1.1. *Los resultados que se expondrán en la sección §4.3 están publicados en [16], y los expuestos en las secciones §4.4 y §4.5 en [14] y [13], respectivamente.*

4.1.1. Conexión con la teoría de grupos y las álgebras de Hopf

Es bien conocida la estrecha relación existente entre la representación de la teoría de grupos y ciertas estructuras algebraicas, tales como los grupos de Lie, las álgebras de Lie, los grupos finitos, los grupos cuánticos, las álgebras de Hecke, las q -álgebras (o álgebras cuánticas) y todo tipo de funciones especiales, tales como polinomios ortogonales de tipo hipergeométrico o de tipo hipergeométrico básico en una o más variables, véase, por ejemplo las monografías [137] y las referencias contenidas en ellas. Es importante resaltar que los grupos cuánticos y las q -álgebras no denotan grupos ni álgebras de Lie sino deformaciones particulares de grupos y/o álgebras de Lie, de hecho pertenecen a una categoría más general llamada categoría de álgebras de Hopf [137].

Como ya se mencionó en la introducción de esta memoria, la teoría de funciones especiales ha sido de vital importancia desde sus comienzos en los siglos XVIII y XIX gracias al uso de ésta por matemáticos como Euler, Gauss, Heine, Riemann, Laplace, Legendre entre otros para resolver problemas relacionados con la física y la matemática.

La conexión con la teoría de grupos es mucho más reciente, de hecho, comenzó con Gelfand y Šapiro en los años 50 los cuales descubrieron la relación entre los polinomios de Jacobi y el grupo lineal especial $SL(2, \mathbb{C})$. A partir de ese momento, la literatura que considera dichas relaciones se ha expandido de manera explosiva y diversas conexiones entre la teoría de grupos y las funciones especiales, principalmente de tipo hipergeométrico, han sido establecidas.

Posteriormente, después de que se hubiesen introducido los grupos cuánticos, Drinfeld y Woronowicz mostraron que estos ‘grupos’ estaban relacionados con las q -funciones especiales de una forma análoga a como están relacionados los polinomios de Jacobi y el grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

Más recientemente, y en conexión con problemas relacionados con la física cuántica, se ha comprobado que los sistemas cuánticos de simetría relativos a grupos de Lie juegan un papel decisivo a la hora de explicar los diferentes estados de los átomos y los fotones [69, 100] –de hecho los q -polinomios fueron considerados para describir algunas de las propiedades de dichos estados cuánticos de los átomos y los fotones [68]–. Además, el estudio de los q -polinomios aumentó debido a la aparición de las álgebras cuánticas y los grupos cuánticos [60, 62, 75, 125] que fueron introducidos para estudiar el problema inverso de la dispersión cuántica [61] y las ecuaciones de Yang-Baxter [94].

Además sus potenciales aplicaciones en la física han aumentado debido a su conexión con los

q -osciladores armónicos. Dichos objetos tienen una gran importancia en diversos problemas de la física matemática actual: sistemas integrales, teoría cuántica de campos conformes, física estadística, entre otros (véase [59] y las referencias de ésta). También han sido empleadas para describir el espectro rotacional y vibracional de los núcleos atómicos [51], de las moléculas diatómicas [5, 50, 52], etc.

Por otro lado, usando el q -análogo de la teoría cuántica del momento angular [129, 130, 131, 132] pueden obtenerse diversos resultados relacionados con los q -polinomios, algunos de los cuales de una forma nada trivial desde el punto de vista de la teoría de los polinomios ortogonales.

Finalmente, en esta memoria se hará referencia a los coeficientes de Racah (6j-símbolos) de las q -álgebras $SU_q(2)$ relacionados con los polinomios de q -Racah, introducidos por Nikiforov y Uvarov (véase e.g. [115]) los cuales son ligeramente distintos a los introducidos por Askey y Wilson en [31], así como con sus duales [27]. Un estudio detallado del álgebra $SU_q(2)$ puede encontrarse en [83, 86, 89, 90] entre otros. Para la conexión entre las diferentes familias de q -polinomios y las álgebras cuánticas, véase [25, 86, 89, 99, 137] entre otros.

4.2. Las funciones normalizadas

Dada una familia de q -polinomios, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, estos son ortogonales respecto cierta función peso ρ , esto es

$$\sum_{s=a}^{b-1} p(s) \rho(s) \nabla x_1(s), \quad \Delta s = 1. \quad (4.1)$$

Las *funciones normalizadas asociadas a dicha familia de q -polinomios respecto al producto interior* (4.1) se definen como [39, 126]

$$\varphi_n(s) = d_n^{-1} \sqrt{\rho(s)} P_n. \quad (4.2)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) \varphi_m(s) \nabla x_1(s) = \delta_{nm}, \quad \Delta s = 1.$$

A continuación se establecerán algunas propiedades importantes relativas a tales funciones las cuales generalizan a las definidas en [96]. Antes de nada, si se inserta (4.2) en la ecuación en diferencias (2.25), se obtiene que tales funciones normalizadas satisfacen la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} \varphi_n(s+1) + \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} \varphi_n(s-1) \\ & - \left(\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} \right) \varphi_n(s) + \lambda_n \nabla x_1(s) \varphi_n(s) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aquí, como antes, $\Theta(s)$ denota a la función $\sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)$. Esto es, para cada $n = 0, 1, \dots$, φ_n es una autofunción del operador lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} H_n := & e^{-\partial_s} \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} + \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} e^{\partial_s} \\ & - \left(\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} - \lambda_n \nabla x_1(s) \right) I. \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $e^{\pm \partial_s}$ es el operador desplazamiento, con $e^{\pm \partial_s} f(s) = f(s \pm 1)$ e I representa el operador identidad.

Análogamente, (2.9), se traduce en la siguiente RRTT

$$\alpha_n \frac{d_{n+1}}{d_n} \varphi_{n+1}(s) + \gamma_n \frac{d_{n-1}}{d_n} \varphi_{n-1}(s) + (\beta_n - x(s)) \varphi_n(s) = 0. \quad (4.5)$$

4.3. El método de factorización de tipo Infeld & Hull

En esta sección se verá cómo factorizar una ecuación en diferencias (4.3) sobre la red no uniforme

$$x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3, \quad (4.6)$$

o equivalentemente, como factorizar al operador H_n definido en (4.4).

Como se ha visto, para las funciones normalizadas φ_n se tiene que

$$H_n \varphi_n(s) = 0.$$

Sean L_n^+ y L_n^- dos operadores definidos como

$$\begin{aligned} L_n^+ &= u_n(s)I + \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} e^{-\partial_s}, \\ L_n^- &= v_n(s)I + \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} e^{\partial_s}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}, \\ v_n(s) &= -\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} + \lambda_n \nabla x_1(s) + \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) - \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.49), (2.50), se obtiene que

$$L_n^+ \varphi_n(s) = \alpha_n \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} \frac{d_{n+1}}{d_n} \varphi_{n+1}(s), \quad (4.8)$$

$$L_n^- \varphi_n(s) = \gamma_n \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} \frac{d_{n-1}}{d_n} \varphi_{n-1}(s). \quad (4.9)$$

Es decir, L_n^+ y L_n^- son operadores creación y destrucción, respectivamente.

Nótese que las dos últimas expresiones permiten generar el conjunto de todas las funciones φ_n . De hecho, a partir de (4.9) tomando $n = 0$ y teniendo en cuenta que $\varphi_{-1} \equiv 0$ se puede obtener φ_0 . Luego, sustituyendo la función obtenida en (4.8), se pueden encontrar las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$

Proposición 4.3.1. *Los operadores $\frac{[2n]_q}{\lambda_{2n}} L_n^+$ y $\frac{[2n+2]}{\lambda_{2n+2}} L_n^-$ son mutuamente adjuntos.*

Prueba: Bastará probar que para cualesquiera m, n enteros no negativos,

$$\sum_{s=a}^{b-1} L_n^+ [\varphi_n(s)] \varphi_m(s) \nabla x_1(s) = \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) L_n^- [\varphi_m(s)] \nabla x_1(s).$$

Pero

$$\sum_{s=a}^{b-1} L_n^+ [\varphi_n(s)] \varphi_m(s) \nabla x_1(s) = \alpha_n \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} \frac{d_{n+1}}{d_n} \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_{n+1}(s) \varphi_m(s) \nabla x_1(s),$$

y

$$\sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) L_n^-[\varphi_m(s)] \nabla x_1(s) = \gamma_m \frac{\lambda_{2m}}{[2m]_q} \frac{d_{m-1}}{d_m} \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) \varphi_{m-1}(s) \nabla x_1(s).$$

Así, si $m \neq n+1$ ambas expresiones valen cero, y si $m = n+1$, dado que $\gamma_m d_{m-1}^2 = \alpha_{m-1} d_m^2$, de nuevo ambas coinciden, luego el resultado queda probado. El caso de ortogonalidad continua se trata de manera análoga. $\square$

Proposición 4.3.2. *El operador H_n definido en (4.4) es autoadjunto.*

Prueba: De nuevo se probará para el caso de tener una ortogonalidad discreta. Usando las condiciones de contorno $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0$ – las cuales son una consecuencia de (2.42) – se puede escribir

$$\begin{aligned} & \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} \varphi_l(s-1) \nabla x_1(s) \\ &= \sum_{s'=a-1}^{b-2} \varphi_n(s'+1) \sqrt{\Theta(s')\sigma(s'+1)} \frac{1}{\nabla x(s'+1)} \varphi_l(s') \nabla x_1(s') \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s+1) \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\nabla x(s+1)} \varphi_l(s) \nabla x_1(s) \\ & \quad + \varphi_n(a) \sqrt{\Theta(a-1)\sigma(a)} \frac{1}{\nabla x(a)} \varphi_l(a-1) \nabla x_1(a) \\ & \quad - \varphi_n(b) \sqrt{\Theta(b-1)\sigma(b)} \frac{1}{\nabla x(b)} \varphi_l(b-1) \nabla x_1(b), \end{aligned}$$

donde en los dos últimos sumandos se utilizó que $\Delta x(a) = x(a+1) - x(a)$. Ahora, usando que $\varphi_n(s) = d_n^{-1} \sqrt{\rho(s)} P_n(s)$, así como las condiciones de contorno $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} & \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_l(s) \left\{ \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} \varphi_n(s+1) \nabla x_1(s+1) \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} \varphi_n(s-1) \nabla x_1(s) \right\} \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \varphi_n(s) \left\{ \sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} \varphi_l(s+1) \nabla x_1(s+1) \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} \varphi_l(s-1) \nabla x_1(s) \right\}, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Proposición 4.3.3. *Las funciones u_n y v_n satisfacen la relación:*

$$u_n(s+1) = v_{n+1}(s).$$

Prueba: Por definición de las funciones u y v ,

$$\begin{aligned} u_n(s+1) - v_{n+1}(s) &= \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s+1)}{\tau'_n} - \frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x(s)} \\ & \quad + \frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} \frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau'_{n+1}} - \lambda_{n+1} \nabla x_1(s) - \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} (x(s) - \beta_{n+1}) + \frac{\tau(s) \nabla x_1(s)}{\Delta x(s)}. \end{aligned}$$

Usando el desarrollo $\tau_n(s+1) = \tau'_n x_n(s+1) + \tau_n(0)$, y dado que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^2(s)}{\Delta x(s)} &= \frac{x^2(s+1) - x^2(s)}{x(s+1) - x(s)} = x(s+1) + x(s) = [2]_q x_1(s) + (2 - [2]_q) c_3, \\ x(s) \nabla x_1(s) &= x(s) (c_1 q^s - c_2 q^{-s}) k_q = (c_1^2 q^{2s} - c_2^2 q^{-2s}) k_q + c_3 (c_1 q^s - c_2 q^{-s}) k_q, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x(s)} &= \frac{\Delta}{\Delta x(s)} \left[\tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(s) \nabla x_1(s) \right] \\ &= \frac{\Delta}{\Delta x(s)} \left[\frac{\tilde{\sigma}''}{2} x^2(s) + \tilde{\sigma}'(0) x(s) + \tilde{\sigma}(0) - \frac{1}{2} (\tau' x(s) + \tau(0)) \nabla x_1(s) \right] \\ &= \frac{\tilde{\sigma}''}{2} ([2]_q x_1(s) + (2 - [2]_q) c_3) + \tilde{\sigma}'(0) - \frac{1}{2} \frac{c_1 q^{s+1} + c_2 q^{-s}}{c_1 q^{s+1} - c_2 q^{-s}} \tau(0) k_q \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{[2]_q (c_1^2 q^{2s+1} + c_2^2 q^{-2s-1}) + c_3 (c_1 q^{s+\frac{1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{1}{2}})}{c_1 q^{s+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}} \tau' k_q. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u_n(s+1) - v_{n+1}(s) &= \frac{\lambda_n}{[n]_q} x_n(s+1) + \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(0)}{\tau'_n} - \frac{\tilde{\sigma}''}{2} [2]_q x_1(s) - \frac{c_3}{2} (2 - [2]_q) \tilde{\sigma}'' \\ &\quad - \tilde{\sigma}'(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1(s) - c_3}{c_1 q^{s+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}} \right) \tau(0) k_q + \frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} \frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau'_{n+1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{[2]_q (c_1^2 q^{2s+1} + c_2^2 q^{-2s-1})}{c_1 q^{s+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}} + \frac{c_3 x_1(s) - c_3^2}{c_1 q^{s+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}} \right) \tilde{\tau}' k_q \\ &\quad - \lambda_{n+1} \nabla x_1(s) - \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} \left(c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3 - \frac{[n+1]_q \tau_n(0)}{\tau'_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[n+2]_q \tau_{n+1}(0)}{\tau'_{n+1}} - c_3 (1 + [n+1]_q - [n+2]_q) \right) + \frac{\tau(s) \nabla x_1(s)}{\Delta x(s)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las identidades

$$\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(0)}{\tau'_n} + [n+1]_q \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} \frac{\tau_n(0)}{\tau'_n} = \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} + [n+1]_q \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} \right) \frac{\tau_n(0)}{\tau'_n} = -[n+2]_q \tau_n(0),$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} \frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau'_{n+1}} - [n+2]_q \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} \frac{\tau_{n+1}(0)}{\tau'_{n+1}} = [n+1]_q \tau_{n+1}(0) + \frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} x_{n+1}(s),$$

y

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_n}{[n]_q} (c_1 q^{s+1+\frac{n}{2}} + c_2 q^{-s-1-\frac{n}{2}}) - \frac{\tilde{\sigma}''}{2} [2]_q (c_1 q^{s+\frac{1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}) - \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} (c_1 q^s + c_2 q^{-s}) \\ &- \lambda_{n+1} (c_1 q^s - c_2 q^{-s}) k_q + \frac{1}{2} \tau' (c_1 q^{s+\frac{1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{1}{2}}) (q + q^{-1}) = \frac{c_1 q^s \tau'}{2} (q^{n+\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}) \\ &+ \frac{c_1 q^s \tilde{\sigma}''}{2 k_q} (q^{n+\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}) + \frac{c_2 q^{-s} \tau'}{2} (q^{-n-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}) + \frac{c_2 q^{-s} \tilde{\sigma}''}{2 k_q} (-q^{-n-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} (c_1 q^{s+\frac{n+1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{n+1}{2}}), \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
u_n(s+1) - v_{n+1}(s) = & -\frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} \left(c_1 q^{s+\frac{n+1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{n+1}{2}} \right) + c_3 \frac{\lambda_n}{[n]_q} - [n+2]_q \tau_n(0) \\
& - c_3 \tilde{\sigma}'' - \tilde{\sigma}'(0) + \frac{1}{2} \tau' c_3 k_q + \frac{1}{2} \tau(0) k_q + [n+1]_q \tau_{n+1}(0) \\
& + \frac{\lambda_{n+1}}{[n+1]_q} \left(c_1 q^{s+\frac{n+1}{2}} + c_2 q^{-s-\frac{n+1}{2}} + c_3 \right) \\
& + \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} c_3 ([n+1]_q - [n+2]_q).
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo la expresión de $\tau_n(0)$ y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
-[n+2]_q [n]_q - 1 + [n+1]_q [n+1]_q &= 0, \\
-[n+2]_q (q^{n/2} + q^{-n/2}) + k_q + [n+1]_q (q^{(n+1)/2} + q^{-(n+1)/2}) &= 0,
\end{aligned}$$

se tiene que $u_n(s+1) - v_{n+1}(s) = 0$ y la proposición queda probada. $\square$

Si ahora se calcula

$$\begin{aligned}
L_{n+1}^- \circ L_n^+ = & v_{n+1}(s) u_n(s) + \Theta(s) \sigma(s+1) \left(\frac{1}{\Delta x(s)} \right)^2 \\
& + u_n(s+1) \left\{ \sqrt{\Theta(s-1) \sigma(s)} \frac{1}{\nabla x(s)} e^{-\partial_s} + \sqrt{\Theta(s) \sigma(s+1)} \frac{1}{\Delta x(s)} e^{\partial_s} \right\},
\end{aligned}$$

y se sustituyen los valores de u_n , v_n y H_n se obtiene que

$$L_{n+1}^- \circ L_n^+ = h_n^\mp I + u_n(s+1) H_n, \quad (4.10)$$

donde la función

$$\begin{aligned}
h_n^\mp = & \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s+1)}{\tau'_n} - \frac{\sigma(s+1)}{\nabla x(s+1)} \right) \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \lambda_n \Delta x(s - \frac{1}{2}) \right) \\
& + \frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s+1)}{\tau'_n} \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)},
\end{aligned}$$

es independiente de s . De hecho, teniendo en cuenta (4.8), (4.9) y (4.10), se obtiene que

$$h_n^\mp = \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} \frac{\lambda_{2n+2}}{[2n+2]_q} \alpha_n \gamma_{n+1},$$

que es una constante independiente de s (dependiente de n). De la misma forma,

$$L_{n-1}^+ \circ L_n^- = h_n^\pm I + u_{n-1}(s) H_n,$$

donde

$$\begin{aligned}
h_n^\pm = & \left(-\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s-1)}{\tau'_n} + \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s-1) - \beta_n) + \lambda_n \Delta x(s - \frac{3}{2}) \right) \\
& \times \left(-\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} + \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} \right) \\
& + \left(\frac{\lambda_n}{[n]_q} \frac{\tau_n(s)}{\tau'_n} - \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} (x(s) - \beta_n) \right) \left(\frac{\Theta(s-1)}{\Delta x(s-1)} \right),
\end{aligned}$$

es independiente de s . Además, aplicando la última expresión a las funciones φ_n , y teniendo en cuenta (4.8) y (4.9), se obtiene que

$$h_n^\pm = \frac{\lambda_{2n-2}}{[2n-2]_q} \frac{\lambda_{2n}}{[2n]_q} \alpha_{n-1} \gamma_n,$$

que es una constante independiente de s (dependiente de n).

Nota 4.3.1. Nótese que $h_{n+1}^\pm = h_n^\mp$.

Todos los resultados anteriores conducen al Teorema principal de esta sección.

Teorema 4.1. El operador H_n correspondiente a la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico que las funciones ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen, admite la siguiente factorización – usualmente se denomina factorización de tipo Infeld & Hull –

$$u_n(s+1)H_n = L_{n+1}^- \circ L_n^+ - h_n^\mp I, \quad (4.11)$$

y

$$u_n(s)H_{n+1} = L_n^+ \circ L_{n+1}^- - h_n^\mp I, \quad (4.12)$$

respectivamente.

Nota 4.3.2. Sustituyendo en las fórmulas anteriores la expresión $x(s)$ por s se obtienen los resultados correspondientes a los casos de la red uniforme (Hahn, Kravchuk, Meixner y Charlier), considerados anteriormente por diversos autores, véase por ejemplo [39, 96, 126] y mediante la toma de límites adecuados (véase [85, 115]), se pueden recuperar los casos clásicos estándar (Jacobi, Laguerre y Hermite).

4.3.1. Aplicación a ciertas funciones q -ortogonales normalizadas

En este apartado se aplicarán los resultados anteriores a varias familias de q -polinomios ortogonales y a sus correspondientes funciones ortonormales. Más concretamente se considerarán las siguientes familias: las funciones de Askey-Wilson, las q -funciones grandes de q -Jacobi y las funciones de Al-Salam & Carlitz I y II. La información esencial para dichas familias puede tomarse de [85].

Por último, se puntualiza que factorizaciones similares (aunque no iguales) fueron obtenidas por otros autores, por ejemplo Miller en [77] consideró los polinomios sobre la red exponencial y Bangerezako estudió el caso Askey-Wilson. El interés principal de esta sección es mostrar que las fórmulas generales obtenidas dan lugar, de una forma sencilla, a las fórmulas de factorización de todas las familias de funciones normalizadas.

□ Las funciones de Askey-Wilson

Cómo ya se mencionó anteriormente, los polinomios de Askey-Wilson son polinomios sobre la red $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}) \equiv x$, definidos como [85]

$$p_n(x(s); a, b, c, d) = \frac{(ab; q)_n (ac; q)_n (ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, aq^s, aq^{-s} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q; q \right), \quad (4.13)$$

i.e., corresponden al caso general (2.37) tomando $q^{s_1} = a$, $q^{s_2} = b$, $q^{s_3} = c$, $q^{s_4} = d$. La relación de ortogonalidad asociada a dicha familia es de la forma

$$\int_{-1}^1 \omega(x) p_n(x; a, b, c, d) p_m(x; a, b, c, d) \sqrt{1-x^2} \kappa_q dx = \delta_{nm} d_n^2,$$

donde

$$\omega(x) = \frac{h(x, 1)h(x, -1)h(x, q^{\frac{1}{2}})h(x, -q^{\frac{1}{2}})}{2\pi\kappa_q(1-x^2)h(x, a)h(x, b)h(x, c)h(x, d)}, \quad h(x, \alpha) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 - 2\alpha x q^k + \alpha^2 q^{2k}],$$

y el cuadrado de la norma viene dada por

$$d_n^2 = \frac{(abcdq^{n-1}; q)_n (abcdq^{2n}; q)_{\infty}}{(q^{n+1}, abq^n, acq^n, adq^n, bcq^n, bdq^n, cdq^n; q)_{\infty}}.$$

Los polinomios de Askey-Wilson satisfacen la ecuación en diferencias (2.25) con

$$\sigma^{AW}(s) = -q^{-2s+1/2} \kappa_q^2 (q^s - a)(q^s - b)(q^s - c)(q^s - d),$$

$$\tau^{AW}(s) = 4(q-1)(1-abcd)x(s) + 2(q-1)(-a-b-c-d+abc+abd+acd+bcd),$$

y $\lambda_n = 4q^{-n+1}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1})$.

Los datos principales de estos polinomios pueden encontrarse en la tabla A.1 del apéndice A. Sean φ_n^{AW} las funciones normalizadas (véase (2.44)) definidas como

$$\varphi_n^{AW}(x) = d_n^{-1} \sqrt{\omega(x)} p_n(x; a, b, c, d),$$

las cuales son autofunciones del Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_n^{AW} = & \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s-1]_q} G(s, a, b, c, d) e^{-\partial_s} + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s+1]_q} G(s+1, a, b, c, d) e^{\partial_s} \\ & + 2 \left(q^{-2s+\frac{1}{2}} \frac{\prod_{i=1}^4 (1-q^{s_i+s})}{[2s+1]_q} + q^{-2s+\frac{1}{2}} \frac{\prod_{i=1}^4 (q^s - q^{s_i})}{[2s-1]_q} \right. \\ & \left. + q^{-n+1} \kappa_q^2 (1-q^n)(1-abcdq^{n-1})[2s]_q \right) I \end{aligned}$$

donde

$$G(s, a, b, c, d) = \sqrt{\prod_{i=1}^4 (1 - 2q^{s_i} q^{-\frac{1}{2}} x_{-1}(s) + q^{-1} q^{2s_i})}.$$

Si se toma

$$u_n^{AW}(s) = D_n x_n(s) + D_n E_n + q^{-2s+\frac{1}{2}} \frac{(q^s - a)(q^s - b)(q^s - c)(q^s - d)}{[2s-1]_q},$$

donde

$$\begin{aligned} D_n = & -4q^{\frac{1-n}{2}} (q-1)(1-abcdq^{n-1}), \\ E_n = & \frac{(-a-b-c-d+(abc+abd+acd+bcd)q^n)q^{\frac{n}{2}}}{2(1-abcdq^{2n})}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $v_n^{AW}(s) = u_{n-1}^{AW}(s+1)$, se definen los operadores L_n^+ y L_n^- como

$$\begin{aligned} L_n^+ = & u_n^{AW}(s)I + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s-1]_q} G(s, a, b, c, d) e^{-\partial_s}, \\ L_n^- = & v_n^{AW}(s)I + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s+1]_q} G(s+1, a, b, c, d) e^{\partial_s}, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$L_{n+1}^- \circ L_n^+ = D_{2n} D_{2n+2} \gamma_{n+1} I + v_{n+1}^{AW}(s) H_n^{AW},$$

$$L_{n-1}^+ \circ L_n^- = D_{2n-2} D_{2n} \gamma_n I + u_{n-1}^{AW}(s) H_n^{AW},$$

la cual es la fórmula de factorización para las funciones de Askey-Wilson.

Antes de pasar al siguiente ejemplo, se considerará el caso especial cuando $a = b = c = d = 0$, i.e., los q -polinomios continuos de Hermite

$$H_n(x|q) = 2^{-n} e^{in\theta} {}_2\varphi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; q^n e^{-2i\theta} \right), \quad x = \cos \theta.$$

Esta familia de polinomios esta íntimamente relacionada con el modelo del oscilador q -armónico introducido por Biedenharn [48] y Macfarlane [98]. De hecho, fue utilizado en [38], donde se consideró por primera vez la factorización para los polinomios continuos de q -Hermite. Si se sustituye $a = b = c = d = 0$ en las fórmulas anteriores, se obtiene la factorización para las funciones continuas de q -Hermite

$$\varphi_n^{qHc}(x) = \sqrt{\frac{h(x, 1)h(x, -1)h(x, q^{\frac{1}{2}})h(x, -q^{\frac{1}{2}})(q^{n+1}; q)_\infty}{2\pi\kappa_q(1-x^2)}} H_n(x|q),$$

donde, como antes, $\kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$. De hecho, para esta familia de q -polinomios se tiene que

$$\sigma^{qHc}(s) = -\kappa_q^2 q^{2s+\frac{1}{2}}, \quad \tau^{qHc}(s) = 4(q-1)x(s), \quad \lambda_n = 4q^{-n+1}(1-q^n),$$

$$H_n^{qHc} = \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s-1]_q} e^{-\partial_s} + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s+1]_q} e^{\partial_s} + 2 \left(\frac{q^{-2s+\frac{1}{2}}}{[2s+1]_q} + \frac{q^{2s+\frac{1}{2}}}{[2s-1]_q} - q^{-n+1} \kappa_q^2 (1-q^n) [2s]_q \right) I,$$

$$L_n^+ = \left(-4q^{-n/2+\frac{1}{2}}(q-1)x_n(s) + \frac{q^{2s+\frac{1}{2}}}{[2s-1]_q} \right) I + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s-1]_q} e^{-\partial_s},$$

$$L_n^- = \left(-4q^{-\frac{n}{2}+1}(q-1)x_{n+1}(s) + \frac{q^{2s+\frac{5}{2}}}{[2s+1]_q} \right) I + \frac{2q^{\frac{3}{2}}}{[2s+1]_q} e^{-\partial_s},$$

$$\text{y } h_n^\pm = 4\kappa_q^2 q^{-2n+1}(1-q^n).$$

□ Las funciones grandes de q -Jacobi

Los q -polinomios grandes de Jacobi fueron introducidos por Hahn en 1949 y se definen [85] por

$$P_n(x; a, b, c; q) = \frac{(aq; q)_n (cq; q)_n}{(abq^{n+1}; q)_n} {}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ aq, cq \end{matrix} \middle| q; q \right), \quad x(s) = q^s \equiv x.$$

Para esta familia los coeficientes de la ecuación (2.25) son

$$\sigma^{BqJ}(x) = q^{-1}(x-aq)(x-cq),$$

$$\tau^{BqJ}(x) = \frac{1-abq^2}{(1-q)q^{\frac{1}{2}}} x + q^{\frac{1}{2}} \frac{a(bq-1)+c(aq-1)}{1-q},$$

y $\lambda_n = -q^{-\frac{n}{2}}[n]_q \frac{1-abq^{n+1}}{1-q}$. Las funciones normalizadas grandes de q -Jacobi vienen definidas por

$$\varphi_n^{BqJ}(s) = \sqrt{\frac{(x/a, x/c; q)_\infty (aq, bq, abq/c; q)_\infty (abq, aq, aq, cq, cq; q)_n (-ac)^n}{(x, bx/c, c/a, aq/c, abq^2; q)_\infty (1-q)aq(1-abq)(q, bq, abq/c; q)_n}} \\ \times {}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ aq, cq \end{matrix} \middle| q; q \right).$$

El correspondiente Hamiltoniano es

$$H^{BqJ} = \frac{\sqrt{a(x-q)(x-aq)(x-cq)(bx-cq)}}{x(q-1)} e^{-\partial_s + q} \frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)(x-c)(bx-c)}}{x(q-1)} e^{\partial_s} \\ + \left(\frac{1+abq^{2n+1}}{q^n(1-q)} x - \frac{q(a+ab+c+ac)}{1-q} + \frac{acq(q+1)}{1-q} x^{-1} \right) I.$$

Las funciones u_n y v_n vienen dadas por

$$u_n^{BqJ}(x) = \frac{abq^{n+1}}{1-q} x + D_n - \frac{acq^2}{q-1} x^{-1}, \quad y \quad v_n^{BqJ}(x) = \frac{abq^{n+1}}{1-q} x + D_{n-1} - \frac{acq}{q-1} x^{-1},$$

donde

$$D_n = \frac{ab(ab+ac+a+c)q^{2n+3} - a(b+c+ab+bc)q^{n+2}}{(1-abq^{2n+2})(1-q)}.$$

Por tanto

$$L_n^+ = u_n^{BqJ}(x)I + \frac{\sqrt{a(x-q)(x-aq)(x-cq)(bx-cq)}}{x(q-1)} e^{-\partial_s}, \\ L_n^- = v_n^{BqJ}(x)I + q \frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)(x-c)(bx-c)}}{x(q-1)} e^{\partial_s}.$$

Así

$$L_{n+1}^- \circ L_n^+ = \delta_{n+1} \gamma_{n+1} I + v_{n+1}^{BqJ}(x) H_n^{BqJ}, \\ L_{n-1}^+ \circ L_n^- = \delta_n \gamma_n I + u_{n-1}^{BqJ}(x) H_n^{BqJ},$$

donde

$$\delta_n = \frac{(1-abq^{2n-1})(1-abq^{2n+1})}{q^{2n-1}(q-1)^2}.$$

Las expresiones anteriores son las fórmulas de factorización asociadas a las funciones normalizadas grandes de q -Jacobi. Nótese que los q -polinomios de Hahn y los q -polinomios grandes de Laguerre son casos particulares de los q -polinomios grandes de Jacobi escogiendo $c = q^{-N-1}$, $N = 1, 2, \dots$, y $c = 0$, respectivamente.

Dado que todos los q -polinomios discretos sobre la red $x(s) = c_1 q^s + c_3$ – los denominados q -polinomios de la clase Hahn – pueden obtenerse a través de los q -polinomios grandes de Jacobi bajo ciertos procesos límite (véase, por ejemplo, [23, 85]) de las fórmulas anteriores se pueden obtener el resto de los casos de la tabla de Hahn.

Para finalizar este apartado se considerarán 2 familias de especial interés.

□ Las funciones de Al-Salam & Carlitz I y II

Los polinomios de Al-Salam & Carlitz I (y II) aparecen en ciertos modelos de q -osciladores armónicos, véase [30, 37, 38, 114]. Dichos polinomios vienen definidos [85] por

$$U_n^{(a)}(x; q) = (-a)^n q^{\binom{n}{2}} {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x^{-1} \\ 0 \end{matrix} \middle| q; \frac{qx}{a} \right), \quad x(s) = q^s \equiv x.$$

Como en los casos anteriores, éstos satisfacen la ecuación en diferencias (2.25) donde

$$\sigma^{ACI}(x) = (x-1)(x-a), \quad \tau^{ACI}(x) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}x + q^{\frac{1}{2}} \frac{1+a}{q-1}, \quad \text{y} \quad \lambda_n = [n]_q \frac{q^{1-\frac{n}{2}}}{q-1}.$$

En este caso, las correspondientes funciones normalizadas (4.2) son

$$\varphi_n^{ACI}(x) = \sqrt{\frac{(qx, a^{-1}qx; q)_\infty (-a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)(q; q)_n (q, a, q/a; q)_\infty}} {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x^{-1} \\ 0 \end{matrix} \middle| q; \frac{qx}{a} \right).$$

Si se define el Hamiltoniano como

$$H_n^{ACI} = \frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)}}{x(1-q^{-1})} e^{-\partial_s} + \frac{\sqrt{a(qx-1)(qx-a)}}{x(q-1)} e^{\partial_s} + \left(\frac{q^{1-n}}{1-q}x + \frac{q(a+1)}{q-1} - \frac{[2]_q}{k_q}x^{-1} \right) I,$$

entonces los operadores

$$\begin{aligned} L_n^+ &= u_n^{ACI}(x)I + q \frac{\sqrt{a(x-1)(x-a)}}{x(q-1)} e^{-\partial_s}, \\ L_n^- &= v_n^{ACI}(x)I + \frac{\sqrt{a(qx-1)(qx-a)}}{x(q-1)} e^{\partial_s}, \end{aligned}$$

donde $u_n^{ACI}(x) = \frac{aq}{1-q}x^{-1}$, y $v_n^{ACI}(x) = \frac{a}{1-q}x^{-1}$, satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} L_{n+1}^- \circ L_n^+ &= \frac{aq^{1-n}(q^{n+1}-1)}{(q-1)^2} I + v_{n+1}^{ACI}(x)H_n^{ACI}, \\ L_{n-1}^+ \circ L_n^- &= \frac{aq^{2-n}(q^n-1)}{(q-1)^2} I + u_{n-1}^{ACI}(x)H_n^{ACI}, \end{aligned}$$

que representan las fórmulas de factorización para las funciones normalizadas de Al-Salam & Carlitz I. Si ahora se tiene en cuenta que (véase [85, p. 115])

$$V_n^{(a)}(x; q) = U_n^{(a)}(x; q^{-1}),$$

entonces, la factorización para las funciones normalizadas de Al-Salam & Carlitz II

$$\varphi_n^{ACII}(s) = q^{\binom{s}{2}} \sqrt{\frac{a^{s+n}(aq; q)_\infty q^{\binom{n}{2}}}{(q, aq; q)_s (1-q)(q; q)_n}} {}_2\varphi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x \\ - \end{matrix} \middle| q; \frac{q^n}{a} \right),$$

se sigue de la factorización para las funciones de Al-Salam & Carlitz I cambiando q por q^{-1} .

4.4. El método de factorización clásico

4.4.1. Introducción y preliminares

En esta sección se continua con el estudio, comenzado en la sección anterior (puede verse también [16]), sobre la factorización de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico sobre redes no uniformes, i.e., de la ecuación [117]

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (4.14)$$

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \Delta x \nabla x_1(s), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),$$

donde $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son polinomios de grados a lo más 2 y 1, respectivamente, y λ es una constante independiente de s (véase también [115]).

Si la ecuación en diferencias (4.14) tiene soluciones polinómicas se obtiene la siguiente expresión [115] para los autovalores λ_n

$$\lambda_n = C_1 q^n + C_2 q^{-n} + C_3,$$

$$C_1 = \frac{1}{2(1-q)} \left(\tilde{\tau}' + \frac{\tilde{\sigma}''}{k_q} \right), \quad C_2 = \frac{1}{2(1-q^{-1})} \left(\tilde{\tau}' - \frac{\tilde{\sigma}''}{k_q} \right), \quad C_3 = -\frac{\tilde{\sigma}''(1+q)}{2k_q(1-q)} - \frac{\tilde{\tau}'}{2}, \quad (4.15)$$

donde, como antes, $\tilde{\tau}'$ y $\frac{\tilde{\sigma}''}{2}$ son los coeficientes del desarrollo de Taylor de los polinomios $\tilde{\tau}$ y $\tilde{\sigma}$ de las potencias x y x^2 , respectivamente (véase (2.26)).

Nótese que los coeficientes C_1 y C_2 de los términos q^n y q^{-n} , respectivamente, vienen fijados por las funciones $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ en (4.14), y por lo tanto también el producto

$$C_1 C_2 = \frac{1}{4k_q^2} \left(\left(\frac{\tilde{\sigma}''}{k_q} \right)^2 - (\tilde{\tau}')^2 \right).$$

La sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ satisface la siguiente RRTT

$$\lambda_{n+2} - (q + q^{-1}) \lambda_{n+1} + \lambda_n = \frac{1}{2} (\tilde{\tau}' k_q^2 - \tilde{\sigma}'' [2]_q). \quad (4.16)$$

Recíprocamente, si $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ satisface la RRTT (4.16), entonces ésta es de la forma $\lambda_n = C'_1 q^n + C'_2 q^{-n} + C'_3$. Obviamente, habiendo tomado las condiciones iniciales $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 = -\tilde{\tau}'$, uno recupera la expresión (4.15).

En la sección anterior se ha visto que uno puede factorizar la ecuación de Nikiforov-Uvarov (4.14) con la ayuda de los operadores creación y destrucción, dependientes del grado de los polinomios correspondientes a las autofunciones normalizadas, i.e., dependen de n .

En la siguiente sección se definirán los operadores que se usarán para obtener el MF clásico.

4.4.2. Los operadores de la factorización

Sea $A(s)$ una función continua que no se anula en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$. Dada una SP, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto la función peso ρ , se define el conjunto de funciones normalizadas, $\Phi_{nn \geq 0}$, como

$$\Phi_n(s) = d_n^{-1} A(s) \sqrt{\rho(s)} P_n(s), \quad (4.17)$$

donde d_n representa la norma de P_n y ρ satisface la ecuación de tipo Pearson

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s)\nabla x_1(s). \quad (4.18)$$

Si la SP $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface una ortogonalidad discreta del tipo (4.39), entonces las funciones $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \sum_{s=a}^{b-1} \Phi_n(s) \Phi_m(s) \frac{\nabla x_1(s)}{A^2(s)} = \delta_{n,m}. \quad (4.19)$$

Nótese que si $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$, entonces el conjunto $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ estará constituido por las funciones ortonormales asociadas a la SP $\{P_n\}_{n \geq 0}$. Obviamente, en el caso de una ortogonalidad continua (como en el caso de los polinomios de Askey-Wilson) uno necesita cambiar la suma en (4.19) por una integral de Riemann [40, 115].

Ahora, se considera el q -Hamiltoniano

$$\mathfrak{H}_q := \frac{1}{\nabla x_1(s)} A(s) H_q \frac{1}{A(s)}, \quad (4.20)$$

siendo

$$H_q := -\frac{\sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)}}{\nabla x(s)} e^{-\partial_s} - \frac{\sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)}}{\Delta x(s)} e^{\partial_s} + \left(\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} \right) I, \quad (4.21)$$

donde, como antes, $\Theta(s) = \sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s)$, e I representa el operador identidad.

De hecho,

$$\mathfrak{H}_q \Phi_n(s) = \lambda_n \Phi_n(s), \quad (4.22)$$

i.e., las funciones Φ_n , definidas en (4.17), son autofunciones del operador $\mathfrak{H}_q$.

El primer paso consiste en encontrar dos operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, tales que

$$\mathfrak{H}_q = \mathbf{b} \circ \mathbf{a},$$

i.e., $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ factorizan al q -Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$. Antes de darlos explícitamente se debe de tener en cuenta que si existe dicho par de operadores, entonces existen infinitos. De hecho, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son tales que $\mathfrak{H}_q = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$, entonces para cualquier operador unitario $\mathbf{U}$, i.e. $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = I$, los operadores

$$\tilde{\mathbf{a}} := \mathbf{U} \circ \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b} \circ \mathbf{U}^\dagger,$$

factorizan $\mathfrak{H}_q$ ya que

$$\tilde{\mathbf{b}} \circ \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \circ \mathbf{U}^\dagger \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{a} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a} = \mathfrak{H}_q.$$

La arbitrariedad en la elección del operador unitario $\mathbf{U}$ es esencial ya que permitirá construir un álgebra cerrada, que contiene a $\mathfrak{H}_q$.

Si uno aplica el procedimiento estándar para factorizar la ecuación (4.14), entonces los siguientes operadores surgen de manera natural

Definición 4.4.1. Sea α un número real y $A(s)$ una función continua que no se anula en (a, b) . Se define la familia de α -operadores como

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha^\downarrow &:= \frac{A(s)}{\sqrt{\nabla x_1(s)}} e^{-\alpha \partial_s} \left(e^{\partial_s} \sqrt{\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}} - \sqrt{\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)}} \right) \frac{1}{A(s)}, \\ \mathbf{a}_\alpha^\uparrow &:= \frac{1}{\nabla x_1(s)} A(s) \left(\sqrt{\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}} e^{-\partial_s} - \sqrt{\frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)}} \right) e^{\alpha \partial_s} \frac{\sqrt{\nabla x_1(s)}}{A(s)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

respectivamente.

Con esta definición se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2. Dado el q -Hamiltoniano (4.20) $\mathfrak{H}_q$, los operadores $\mathfrak{a}_\alpha^\downarrow$ y $\mathfrak{a}_\alpha^\uparrow$ definidos en (4.23) son tales que, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{H}_q = \mathfrak{a}_\alpha^\uparrow \circ \mathfrak{a}_\alpha^\downarrow. \quad (4.24)$$

El siguiente paso consiste en obtener el álgebra dinámica asociada al Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$. Para este fin se necesita la siguiente definición.

Definición 4.4.2. Una función $f(z)$ se dice de tipo lineal en z , si existen dos funciones, F y G , tales que para todo $z, \zeta \in \mathbb{C}$, la función $f(z)$ pueda representarse cómo

$$f(z + \zeta) = F(\zeta)f(z) + G(\zeta).$$

Un caso particular de funciones de tipo lineal son las funciones q -lineales, i.e., las funciones de la forma $f(z) = Aq^z + B$. Para estas funciones $F(\zeta) = q^\zeta$ y $G = B(1 - q^\zeta)$.

Nota 4.4.1. Si se usa la expresión dada en (4.15) para los autovalores λ_n , entonces es inmediato ver que λ_n es una función q -lineal de n si y sólo si $\tilde{\sigma}'' = \pm k_q \tilde{\tau}'$. Además, en este caso se tiene

$$\tilde{\sigma}'' = k_q \tilde{\tau}' \Rightarrow \lambda_n = \frac{\tilde{\tau}'}{1 - q}(q^n - 1), \quad \text{o} \quad \tilde{\sigma}'' = -k_q \tilde{\tau}' \Rightarrow \lambda_n = \frac{\tilde{\tau}'}{1 - q^{-1}}(q^{-n} - 1). \quad (4.25)$$

Nótese que el segundo caso puede obtenerse del primero cambiando q por q^{-1} .

Proposición 4.4.1. λ_n es una función q -lineal de n si y sólo si $\lambda_{n+1} = q\lambda_n + C$, donde C es cierta constante.

Prueba: Unos cálculos sencillos muestran que si λ_n es una función q -lineal de n , entonces λ_n satisface la fórmula de recurrencia $\lambda_{n+1} = q\lambda_n + C$, donde, en este caso, $C = \lambda_1$. Pero la solución general de la ecuación en diferencias $\lambda_{n+1} = q\lambda_n + C$ es $\lambda_n = Aq^n + D$, donde A y D son ciertas constantes. $\square$

Nota 4.4.2. Nótese que si λ_n es una función q -lineal de n , entonces λ_n satisface la relación de recurrencia $\lambda_{n+\gamma} - q^\gamma \lambda_n = C$, donde $\gamma \in \mathbb{C}$ y C es cierta constante.

Por último, se tiene el siguiente lema

Lema 4.4.1. Sea $x(s)$ una función q -lineal de s y sea $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ la una sucesión de autovalores de la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico (4.14). Entonces λ_n es una función q -lineal de n si y sólo si $\Delta^{(2)}\sigma(s) = 0$ y es una función q^{-1} -lineal de n si y sólo si $\Delta^{(2)}\Theta(s) = 0$, donde

$$\Delta^{(2)} = \frac{\Delta}{\Delta x_1(s)} \frac{\Delta}{\Delta x(s)}.$$

Prueba: Se sigue de la ecuación (4.25) y que

$$\Delta^{(2)}\sigma(s) = \frac{[2]_q}{2}(\tilde{\sigma}'' - \tilde{\tau}'k_q), \quad \Delta^{(2)}\Theta(s) = \frac{[2]_q}{2}(\tilde{\sigma}'' + \tilde{\tau}'k_q).$$

$\square$

4.4.3. El álgebra dinámica

Definición 4.4.3. Sea ς un número complejo, y sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos operadores. Se define el ς -conmutador de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \varsigma \mathbf{b} \circ \mathbf{a}.$$

En adelante se asumirá que ς es real.

Proposición 4.4.2. Sea $\mathfrak{H}_q$ un operador tal que existen operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y los números reales, ς y Λ , tales que $\mathfrak{H}_q = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$, y $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \Lambda$. Entonces, si Φ es una autofunción de $\mathfrak{H}_q$ asociada al autovalor λ , se tiene

1. $\mathfrak{H}_q[\mathbf{a}\Phi(s)] = \varsigma^{-1}(\lambda - \Lambda)[\mathbf{a}\Phi(s)]$, i.e., $\mathbf{a}\Phi$ es una autofunción de $\mathfrak{H}_q$, asociada al autovalor $\varsigma^{-1}(\lambda - \Lambda)$,
2. $\mathfrak{H}_q[\mathbf{b}\Phi(s)] = (\Lambda + \varsigma\lambda)[\mathbf{b}\Phi(s)]$, i.e., $\mathbf{b}\Phi$ es una autofunción de $\mathfrak{H}_q$ asociada al autovalor $\Lambda + \varsigma\lambda$.

Prueba: En el primer caso, dado que $\mathfrak{H}_q\Phi(s) = \lambda\Phi(s)$,

$$\mathfrak{H}_q[\mathbf{a}\Phi(s)] = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}[\mathbf{a}\Phi(s)] = \varsigma^{-1}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b} - \Lambda)[\mathbf{a}\Phi(s)] = \varsigma^{-1}(\lambda - \Lambda)[\mathbf{a}\Phi(s)].$$

De la misma manera, para el segundo

$$\mathfrak{H}_q[\mathbf{b}\Phi(s)] = \mathbf{b} \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{b}[\Phi(s)] = \mathbf{b}(\Lambda + \varsigma\lambda)\Phi(s) = (\Lambda + \varsigma\lambda)[\mathbf{b}\Phi(s)].$$

□

Igualmente se puede probar que

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})[\Phi(s)] = (\Lambda + \varsigma\lambda)\Phi(s). \quad (4.26)$$

Además, si Φ es una autofunción de $\mathfrak{H}_q$ (o de $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$), entonces también $\mathbf{a}^k\Phi$ y $\mathbf{b}^k\Phi$ son, en general, autofunciones de $\mathfrak{H}_q$ (o de $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$).

Nota 4.4.3. Obviamente la condición $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = I$ puede cambiarse por

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \Lambda,$$

donde Λ es una constante no nula arbitraria. De hecho, si los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ satisfacen la relación de ς -conmutación

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \Lambda,$$

entonces los operadores $\mathbf{a} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$ satisfacen las relaciones

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = I, \quad \text{y} \quad \mathfrak{H}_q = \Lambda \mathbf{b} \circ \mathbf{a}.$$

La Proposición 4.4.2 se refiere al caso de un sistema descrito por el Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$ el cual admite la factorización (4.24) en términos de los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, satisfaciendo la relación de ς -conmutación $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \Lambda$. Además, dice cómo construir una álgebra de simetrías dinámica directamente en ese caso [93].

Todo lo anterior sugiere el siguiente problema:

Problema 1: Encontrar dos operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y una constante ς tales que

$$\mathfrak{H}_q = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}, \quad \text{y} \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = I.$$

La solución al mismo viene dada por los siguientes resultados.

Teorema 4.3. Sea $\mathfrak{H}_q$ el siguiente operador en diferencias (q -Hamiltoniano)

$$\mathfrak{H}_q = \frac{1}{\nabla x_1(s)} A(s) H_q \frac{1}{A(s)}. \quad (4.27)$$

Los operadores $\mathbf{b} = \mathbf{a}_\alpha^\dagger$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\alpha^\dagger$ dados en (4.23) factorizan el q -Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$ (4.27) y satisfacen la relación de ς -conmutación $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_\varsigma = \Lambda$ para cierto número real ς si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{\nabla x(s)}{\nabla x_1(s-\alpha)} \sqrt{\frac{\nabla x_1(s-1)\nabla x_1(s)}{\nabla x(s-\alpha)\Delta x(s-\alpha)}} \sqrt{\frac{\sigma(s-\alpha)\Theta(s-\alpha)}{\sigma(s)\Theta(s-1)}} = \varsigma, \quad (4.28)$$

y

$$\frac{1}{\Delta x(s-\alpha)} \left(\frac{\sigma(s-\alpha+1)}{\nabla x_1(s-\alpha+1)} + \frac{\Theta(s-\alpha)}{\nabla x_1(s-\alpha)} \right) - \varsigma \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} \right) = \Lambda. \quad (4.29)$$

Prueba: Teniendo las expresiones de los operadores $\mathbf{a}_\alpha^\dagger$ y $\mathbf{a}_\alpha^\dagger$, un cálculo directo permite ver que $\mathbf{a}_\alpha^\dagger \circ \mathbf{a}_\alpha^\dagger = A_1(s)e^{\partial_s} + A_2(s)e^{-\partial_s} + A_3(s)I$, donde

$$\begin{aligned} A_1(s) &= -\sqrt{\frac{\nabla x_1(s+1)}{\nabla x_1(s)}} \frac{A(s)}{A(s+1)} \sqrt{\frac{\sigma(s+1-\alpha)\Theta(s-\alpha)}{\Delta x(s-\alpha)\Delta x(s+1-\alpha)}} \frac{1}{\nabla x_1(s+1-\alpha)}, \\ A_2(s) &= -\sqrt{\frac{\nabla x_1(s-1)}{\nabla x_1(s)}} \frac{A(s)}{A(s-1)} \sqrt{\frac{\sigma(s-\alpha)\Theta(s-\alpha)}{\Delta x(s-1-\alpha)\Delta x(s-\alpha)}} \frac{1}{\nabla x_1(s-\alpha)}, \\ A_3(s) &= \frac{1}{\Delta x(s-\alpha)} \left(\frac{\sigma(s+1-\alpha)}{\nabla x_1(s+1-\alpha)} + \frac{\Theta(s-\alpha)}{\nabla x_1(s-\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

De la misma manera, usando (4.21) y (4.20), se tiene

$$\mathbf{a}_\alpha^\dagger \circ \mathbf{a}_\alpha^\dagger = \mathfrak{H}_q = B_1(s)e^{\partial_s} + B_2(s)e^{-\partial_s} + B_3(s)I,$$

donde

$$\begin{aligned} B_1(s) &= -\frac{1}{\nabla x_1(s)} \frac{A(s)}{A(s+1)} \frac{\sqrt{\Theta(s)\sigma(s+1)}}{\nabla x(s+1)}, \\ B_2(s) &= -\frac{1}{\nabla x_1(s)} \frac{A(s)}{A(s-1)} \frac{\sqrt{\Theta(s-1)\sigma(s)}}{\nabla x(s)}, \\ B_3(s) &= \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

En consecuencia,

$$[\mathbf{a}_\alpha^\dagger, \mathbf{a}_\alpha^\dagger]_\varsigma = \left(A_1(s) - \varsigma B_1(s) \right) e^{\partial_s} + \left(A_2(s) - \varsigma B_2(s) \right) e^{-\partial_s} + \left(A_3(s) - \varsigma B_3(s) \right) I. \quad (4.32)$$

Para eliminar los dos términos de la parte derecha de (4.32), la cual es proporcional a los operadores en diferencias $e^{\pm\partial_s}$, se debe exigir que se cumplan simultáneamente las relaciones

$$A_1(s) - \varsigma B_1(s) = 0, \quad A_2(s) - \varsigma B_2(s) = 0. \quad (4.33)$$

A partir de (4.30) y (4.31) se deduce que

$$A_1(s) B_2(s+1) = A_2(s+1) B_1(s),$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{A_1(s)}{B_1(s)} = \frac{A_2(s+1)}{B_2(s+1)}.$$

Por lo tanto, el requerimiento $A_1(s) = \varsigma B_1(s)$ implica la relación $A_2(s) = \varsigma B_2(s)$, y viceversa. Así a partir de (4.32) se tiene que el ς -conmutador $[\mathfrak{a}_\alpha^\uparrow(s), \mathfrak{a}_\alpha^\downarrow(s)]_\varsigma$ es constante si y sólo si se satisface (4.33) y el factor $A_3(s) - \varsigma B_3(s)$ es constante. Por tanto, las condiciones requeridas, (4.49) y (4.50), se siguen inmediatamente. $\square$

Teorema 4.4. *Sea $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de autofunciones de $\mathfrak{H}_q$ correspondientes a los autovalores $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$. Si el problema 1 tiene solución para $\Lambda \neq 0$, entonces los autovalores λ_n de la ecuación en diferencias (4.22) son funciones q -lineales (o q^{-1} -lineales) en n , i.e., $\lambda_n = C_1 q^n + C_3$ (o $\lambda_n = C_2 q^{-n} + C_3$).*

Prueba: Para la prueba, la cual se realizará por reducción al absurdo, se tomará $\varsigma = q^\gamma$, $q \in \mathbb{R}$: Si se supone que el problema 1 tiene solución con $\Lambda \neq 0$ y λ_n no es una función q -lineal (respectivamente, q^{-1} -lineal) de n , por la Proposición 4.4.2 se sabe que $\mathfrak{a}_\alpha^\uparrow \Phi_n$ es un autovalor de $\mathfrak{H}_q$ correspondiente al autovalor $\Lambda + q^\gamma \lambda_n$. Si se denota por $\Phi_{m(n)}$ a dicho autovalor, entonces se tiene $\Lambda + q^\gamma \lambda_n = \lambda_{m(n)}$. Luego usando (4.15) se obtiene que

$$\lambda_{m(n)} = C_1 q^{m(n)} + C_2 q^{-m(n)} + C_3, \quad C_1 C_2 = L_q. \quad (4.34)$$

Por otro lado,

$$\lambda_{m(n)} = \Lambda + q^\gamma \lambda_n = C_1 q^\gamma q^n + C_2 q^\gamma q^{-n} + q^\gamma C_3 + \Lambda = C'_1 q^n + C'_2 q^{-n} + C'_3. \quad (4.35)$$

Pero aquí, dado que $\lambda_{m(n)}$ es un autovalor de (4.14), de nuevo se satisface la condición $C'_1 C'_2 = L_q$, luego

$$C_1 C_2 = L_q = C'_1 C'_2 = C_1 C_2 q^{2\gamma},$$

así, $q^{2\gamma} = 1$, es decir¹, $\gamma = 0$, o $C_1 C_2 = 0$. En el primer caso, comparando (4.34) y (4.35), se tiene que $C_3 q^\gamma + \Lambda = C'_3 = C_3$, luego $\Lambda = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $C_1 C_2 = 0$ y el resultado queda probado. $\square$

Luego se puede concluir que la q -linearidad de los autovalores de $\mathfrak{H}_q$ es una condición necesaria. Sin embargo esta condición no es suficiente ya que hay casos donde los autovalores λ_n son q -lineales (por ejemplo, los que corresponden a los q -polinomios de Meixner, de Charlier y a los de Laguerre con $a \neq q^{-\frac{1}{2}}$), pero los q -Hamiltonianos correspondientes, $\mathfrak{H}_q$, no admiten la factorización como la aquí descrita. Esto justamente refleja que $su_q(1, 1)$ no es un álgebra dinámica apropiada para estos casos y uno debe considerar un álgebra más compleja (véase [139] para el caso $AW(3)$). De hecho, el problema de encontrar una conexión explícita entre los generadores del álgebra $AW(3)$ y los operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, los cuales factorizan los q -Hamiltonianos para estos casos es actualmente un problema abierto.

Nota 4.4.4. *Un caso particular de red no lineal es*

$$x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}).$$

En este caso si se pone $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces las condiciones (4.49) y (4.50) del Teorema 4.3 dan lugar a

$$\sqrt{\frac{\sigma(s - \frac{1}{2})\sigma(-s + \frac{1}{2})}{\sigma(s)\sigma(-s + 1)}} = \varsigma,$$

¹Se recuerda que γ es un número real

y

$$\frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s + \frac{1}{2})}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(-s + \frac{1}{2})}{\nabla x(s)} \right) - \varsigma \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\sigma(-s)}{\Delta x(s)} \right) = \Lambda.$$

respectivamente. Además, si se toma $A(s) = 1$, entonces $\mathfrak{H}_q = (\nabla x_1(s))^{-1} H_q$ y $\alpha = \frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\frac{1}{2}}^{\downarrow} &= \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(e^{\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\sigma(s)} - e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\sigma(-s)} \right), \\ \mathbf{a}_{\frac{1}{2}}^{\uparrow} &= \frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\sqrt{\sigma(s)} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} - \sqrt{\sigma(-s)} e^{\frac{1}{2}\partial_s} \right). \end{aligned}$$

Siguiendo la línea del problema 1 se plantea el siguiente problema.

Problema 2: Encontrar dos operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y una constante ς tales que

$$\mathfrak{H}_q = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}, \quad y \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = I,$$

siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ operadores destrucción y creación, respectivamente, i.e.,

$$\mathbf{a}\Phi_n(s) = D_n\Phi_{n-1}(s) \quad y \quad \mathbf{b}\Phi_n(s) = U_n\Phi_{n+1}(s). \quad (4.36)$$

De nuevo, sin perder generalidad, se cambiará la condición $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = I$ por

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\varsigma} = \Lambda, \quad \text{escogiendo} \quad \Lambda = \lambda_1.$$

Con esta normalización, de nuevo los operadores $\mathbf{b} = \mathbf{a}_{\alpha}^{\downarrow}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\alpha}^{\uparrow}$, dados en (4.23), dan lugar a la factorización del q -Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$.

Si se aplica $\mathbf{b}$ a la primera ecuación de (4.36) y se usa la segunda así como (4.22), se obtiene que $\lambda_n = D_n U_{n-1}$. Por otro lado, aplicando $\mathbf{a}$ a la segunda ecuación en (4.36) y usando la primera así como (4.26) se obtiene que $\lambda_1 + \varsigma \lambda_n = U_n D_{n+1} = \lambda_{n+1}$. Por tanto, usando la Proposición 4.4.1 se concluye que λ_n debería ser una función ς -lineal, i.e., $\lambda_n = C_1 \varsigma^n + C_3$, donde C_1 y C_3 son constantes no nulas. Además, usando la recurrencia $\lambda_1 + \varsigma \lambda_n = \lambda_{n+1}$ y la Proposición 4.4.2 se obtiene que

$$\mathfrak{H}_q[\mathbf{a}\Phi_n] = \lambda_{n-1} \mathbf{a}\Phi_n,$$

$$\mathfrak{H}_q[\mathbf{b}\Phi_n] = \lambda_{n+1} \mathbf{b}\Phi_n,$$

es decir, $\mathbf{a}\Phi_n$ es una autofunción asociada al autovalor λ_{n-1} y $\mathbf{b}\Phi_n$ es una autofunción asociada al autovalor λ_{n+1} , por lo tanto son operadores creación y destrucción asociados a $\mathfrak{H}_q$.

Nota 4.4.5. Una condición necesaria para que el problema 2 tenga solución es que λ_n sea una función q -lineal en n pero no es suficiente (véase el caso de los polinomios de Wall en [14]).

La siguiente pregunta importante es: ¿Cuándo son los α -operadores mutuamente adjuntos? La respuesta a esta cuestión depende del producto interior que se haya considerado. Como ejemplo, considérese el caso de la ortogonalidad discreta (4.19). En este caso,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_{\alpha}^{\downarrow} \Phi_{n+1}, \Phi_k \rangle &= \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\nabla x_1(s) \rho(s)}}{d_n d_{n+1}} \left(e^{-\alpha \partial_s} \left(\sqrt{\frac{\Theta(s) \rho(s)}{\Delta x(s)}} \Delta P_{n+1}(s) \right) \right) P_k(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\nabla x_1(s) \rho(s)}}{d_n d_{n+1}} \sqrt{\frac{\Theta(s - \alpha) \rho(s - \alpha)}{\Delta x(s - \alpha)}} \Delta P_{n+1}(s - \alpha) P_k(s), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se verifica dado que se satisface la ecuación de Pearson (4.18). Si se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{n+1}, \mathfrak{a}_\alpha^\dagger \Phi_k \rangle &= \underbrace{\sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\sigma(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\nabla x(s)}} \left(e^{-\partial_s} \left(e^{\alpha \partial_s} \sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) P_{n+1}(s)}_{S_1} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\Theta(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\Delta x(s)}} \left(e^{\alpha \partial_s} \left(\sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) P_{n+1}(s)}_{S_2} \end{aligned}$$

Si ahora se usan las condiciones de contorno

$$\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

entonces el sumando S_1 da lugar a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=a+1}^b \frac{\sqrt{\sigma(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\nabla x(s)}} \left(e^{-\partial_s} \left(e^{\alpha \partial_s} \sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) P_{n+1}(s) \quad (s \rightarrow s+1) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\sigma(s+1)\rho(s+1)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\nabla x(s+1)}} \left(\left(e^{\alpha \partial_s} \sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) P_{n+1}(s+1) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\Theta(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\Delta x(s)}} \left(e^{\alpha \partial_s} \left(\sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) P_{n+1}(s+1), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue debido a la ecuación de Pearson (4.18). Ahora substrayendo S_2 a S_1 se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{n+1}, \mathfrak{a}_\alpha^\dagger \Phi_k \rangle &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\Theta(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\Delta x(s)}} \left(e^{\alpha \partial_s} \left(\sqrt{\nabla x_1(s)\rho(s)} P_k(s) \right) \right) \Delta P_{n+1}(s) \\ &= \sum_{s=a}^{b-1} \frac{\sqrt{\Theta(s)\rho(s)}}{d_n d_{n+1} \sqrt{\Delta x(s)}} \sqrt{\nabla x_1(s+\alpha)\rho(s+\alpha)} P_k(s+\alpha) \Delta P_{n+1}(s). \end{aligned}$$

Entonces, en el caso discreto, una condición suficiente para que los operadores, $\mathfrak{a}_\alpha^\dagger$ y $\mathfrak{a}_\alpha^\dagger$ sean mutuamente adjuntos, es decir,

$$\langle \mathfrak{a}_\alpha^\dagger \Phi_n, \Phi_m \rangle = \langle \Phi_n, \mathfrak{a}_\alpha^\dagger \Phi_m \rangle, \quad n, m = 0, 1, \dots$$

es que $\alpha = 0$. Para $\alpha \neq 0$, el problema requiere un estudio más detallado.

4.4.4. Ejemplos

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de familias de q -polinomios que admiten una factorización clásica.

Se comenzará considerando familias de la tabla de Hahn (véase, por ejemplo, [23, 85] y las referencias de ésta). Teniendo en cuenta el Teorema 4.3, los α -operadores serán elegidos tomando

$A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$, así las funciones normalizadas – de hecho en este caso son ortonormales – vienen dadas por

$$\Phi_n(s) = d_n^{-1} \sqrt{\rho(s) \nabla x_1(s)} P_n(s),$$

y satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\sum_{s=a}^{b-1} \Phi_n(s) \Phi_m(s) = \delta_{nm}.$$

Antes de comenzar con los ejemplos, se recuerda que para la red $x(s) = c_1 q^s + c_3$,

$$\mathfrak{e}_q(s) := \frac{\nabla x(s)}{\nabla x_1(s - \alpha)} \sqrt{\frac{\nabla x_1(s - 1) \nabla x_1(s)}{\nabla x(s - \alpha) \Delta x(s - \alpha)}} = q^{2\alpha-1},$$

mientras que para la red $x(s) = c_1 q^{-s} + c_3$,

$$\mathfrak{e}_q(s) = q^{-2\alpha+1}.$$

Nota 4.4.6. Para la red q -lineal $x(s) = q^s$, en el caso que $\sigma(s)$ o $\Theta(s) = \sigma(s) + \tau(s) \nabla x_1(s)$ sean constantes, los operadores definidos en (4.23) definen un álgebra dinámica si y sólo si $\alpha = 1$ y $\varsigma = q$, o $\alpha = 0$ y $\varsigma = q^{-1}$, respectivamente. Para probar esto es suficiente considerar (4.49) que da lugar para el primer caso

$$\mathfrak{e}_q(s) \sqrt{\frac{\Theta(s - \alpha)}{\Theta(s - 1)}} = q^{2\alpha-1} \sqrt{\frac{\Theta(s - \alpha)}{\Theta(s - 1)}} = \varsigma.$$

Si se elige $\alpha = 1$ se tiene que $\varsigma = q$. El segundo caso es análogo. De hecho, estos casos constituyen los ejemplos más sencillos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se considerarán los q -polinomios de Al-Salam & Carlitz I y II y los q -polinomios de Stieltjes-Wigert, así como los polinomios de Askey-Wilson y dos casos particulares de estos últimos: los q -polinomios continuos de Laguerre y de Hermite.

□ Los q -polinomios de Al-Salam & Carlitz I y II

Los polinomios de Al-Salam & Carlitz I y II, dependen de un parámetro, a , (véase el apéndice A, o [85, p.114]). Dado que

$$V_n^{(a)}(x; q) = U_n^{(a)}(x; q^{-1}),$$

basta considerar uno de ellos. Así se definen las funciones ortonormales [85, p. 114] como

$$\Phi_n^{ACII}(s) = \frac{1}{d_n} \frac{a^{\frac{s}{2}} q^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{(q, aq; q)_s}} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{-s} \\ - \end{matrix} \middle| q; \frac{q^n}{a} \right), \quad a > 0,$$

$$d_n = (-1)^n (aq)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{(q; q)_n}{(aq; q)_\infty}},$$

En este caso, $\sigma^{ACII}(s) = (q^{-s} - 1)(q^{-s} - a)$ y $\sigma^{ACII}(s) + \tau^{ACII}(s) \nabla x_1(s) = a$ es constante, siendo $x(s) = q^{-s}$, luego el q -Hamiltoniano viene dado por

$$\mathfrak{H}_q^{ACII} = \frac{1}{1 - q} \left(a q^{2s+1} + (1 - q^s)(1 - a q^s) - e^{\partial_s} \sqrt{a(1 - q^s)(1 - a q^s)} q^{s-\frac{1}{2}} - \sqrt{a(1 - q^s)(1 - a q^s)} q^{s-\frac{1}{2}} e^{-\partial_s} \right).$$

Por tanto

$$\mathfrak{H}_q^{ACII} \Phi_n^{ACII}(s) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \Phi_n^{ACII}(s).$$

De hecho, $\mathfrak{H}_q^{ACII}$ se factoriza de la forma

$$\mathfrak{H}_q^{ACII} = \mathfrak{a}^\uparrow \circ \mathfrak{a}^\downarrow,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^\downarrow &:= \mathfrak{a}_0^\downarrow = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(\sqrt{a} q^{s+\frac{1}{2}} - e^{\partial_s} \sqrt{(1-q^s)(1-aq^s)} \right), \\ \mathfrak{a}^\uparrow &:= \mathfrak{a}_0^\uparrow = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(\sqrt{a} q^{s+\frac{1}{2}} - \sqrt{(1-q^s)(1-aq^s)} e^{-\partial_s} \right), \end{aligned}$$

los cuales satisfacen la siguiente relación de q -conmutación

$$[\mathfrak{a}^\downarrow, \mathfrak{a}^\uparrow]_q = I.$$

Por tanto, el álgebra dinámica para esta familia es $su_q(1, 1)$, siendo los operadores, $\mathfrak{a}^\downarrow$ y $\mathfrak{a}^\uparrow$, operadores destrucción y creación, respectivamente, para las funciones Φ_n^{ACII} (véase [85]).

Un caso especial de los q -polinomios de Al-Salam & Carlitz II es el de los q -polinomios discretos de Hermite II

$$\tilde{h}_n(x; q) = i^{-n} V_n^{(-1)}(ix; q).$$

Nótese que estas familias están íntimamente relacionadas con ciertos modelos de q -osciladores [29, 30, 35, 37, 38, 98].

□ Los q -polinomios de Stieltjes-Wigert

Las funciones de Stieltjes-Wigert están definidas en la red $x(s) = q^s \equiv x$, es decir, las funciones asociadas a los q -polinomios de Stieltjes-Wigert vienen definidas por

$$\Phi_n^{SW}(x) = d_n^{-1} \sqrt{(-x, -q/x; q)_\infty} {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n} \\ 0 \end{matrix} \middle| q; -xq^{n+1} \right), \quad x(s) = q^s,$$

$$d_n = \frac{q^{n/2}}{(q; q)_\infty} \sqrt{\frac{(q^{n+1}; q)_\infty}{\log q^{-1}}}.$$

En este caso se ha elegido $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$. Las funciones normalizadas Φ_n^{SW} poseen la siguiente propiedad de ortogonalidad

$$\int_0^\infty \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \delta_{n,m}.$$

Dado que para los q -polinomios de Stieltjes-Wigert [85],

$$\sigma^{SW}(s) = q^{s-1}, \quad y \quad \sigma^{SW}(s) + \tau^{SW}(s) \nabla x_1(s) = q^{2s},$$

el q -Hamiltoniano viene dado, en este caso, por

$$\mathfrak{H}_q^{SW} = \frac{1}{(1-q)} \left((1 + q^{-s}) I - q^{-\frac{s+1}{2}} e^{\partial_s} - q^{-\frac{s}{2}} e^{-\partial_s} \right),$$

que tiene como autofunciones las funciones normalizadas Φ_n^{SW} ,

$$\mathfrak{H}_q^{SW} \Phi_n^{SW}(x) = \frac{1 - q^n}{1 - q} \Phi_n^{SW}(x).$$

Además, de la primera condición del Teorema 4.3 se obtiene que $\varsigma = q^{\frac{\alpha}{2}}$ y de la segunda condición que $\alpha = 2$, es decir, $\varsigma = q$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^\downarrow &:= \mathfrak{a}_2^\downarrow = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(e^{-2\partial_s} - e^{-\partial_s} q^{-\frac{s}{2}} \right), \\ \mathfrak{a}^\uparrow &:= \mathfrak{a}_2^\uparrow = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(e^{2\partial_s} - q^{-\frac{s}{2}} e^{\partial_s} \right),\end{aligned}$$

$\mathfrak{H}_q^{SW} = \mathfrak{a}^\uparrow \circ \mathfrak{a}^\downarrow$ y $[\mathfrak{a}^\downarrow, \mathfrak{a}^\uparrow]_q = I$. No es difícil comprobar que, en este caso, los operadores $\mathfrak{a}^\uparrow$ y $\mathfrak{a}^\downarrow$ son operadores destrucción y creación, respectivamente, para las funciones Φ_n^{SW} (véase [85, p. 117]). Se recuerda al lector que el problema de momentos, asociado a los q -polinomios de Stieltjes-Wigert es indeterminado [1, 123], y por tanto existen distintas funciones peso (tanto discretas como continuas), respecto a la que dicha familia es ortogonal. Un resultado similar para el caso de una ortogonalidad discreta ha sido considerado en [37].

□ Los polinomios de Askey-Wilson

Como ya se mencionó anteriormente para esta familia de q -polinomios,

$$\sigma^{AW}(s) = Cq^{-2s} \prod_{i=1}^4 (q^s - q^{s_i}) = q^{-2s} \prod_{i=1}^4 (q^s - z_i), \quad \Theta(s) = Cq^{2s} \prod_{i=1}^4 (q^{-s} - z_i),$$

donde $a = z_1, b = z_2, c = z_3, d = z_4$.

Además, los polinomios de Askey-Wilson están definidos sobre la red $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s})$ y vienen definidos por (4.13) y las funciones de Askey-Wilson se definen como

$$\Phi_n^{AW}(s) = d_n^{-1} \sqrt{\omega(s)} A(s) p_n(x(s); a, b, c, d).$$

Tomando $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$, se tiene la siguiente relación de ortogonalidad para las funciones normalizadas,

$$\int_{-1}^1 \Phi_n^{AW}(s) \Phi_m^{AW}(s) \nabla x_1(s) dx = \delta_{n,m},$$

y

$$\mathfrak{H}_q^{AW} \Phi_n^{AW}(s) = q(q^{-n} - 1)(1 - abcdq^{n-1}) \Phi_n^{AW}(s),$$

donde

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_q^{AW} = \frac{-1}{k_q^2 \sqrt{\sin \theta}} & \left(\frac{\sqrt{\sigma(s)\sigma(-s+1)}}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q) \sqrt{\sin(\theta + i \log q)}} e^{-\partial_s} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\sigma(s+1)\sigma(-s)}}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q) \sqrt{\sin(\theta - i \log q)}} e^{\partial_s} \right) \\ & + \frac{1}{k_q^2 \sin \theta} \left(\frac{\sigma(s)}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)} + \frac{\sigma(-s)}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)} \right) I.\end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta la Nota 4.4.4 y que

$$\Delta x_1(s + \gamma) = \frac{k_q}{2} q^{-s-\gamma} (q^{s+\gamma} + 1)(q^{s+\gamma} - 1),$$

la primera condición del Teorema 4.3 puede escribirse de la forma

$$q^{-2\alpha+1} \left(\frac{q^{s-\frac{1}{2}} - 1}{q^{s-\alpha} - 1} \sqrt{\frac{(q^{s-1} - 1)(q^s - 1)}{(q^{s-\alpha-\frac{1}{2}} - 1)(q^{s-\alpha+\frac{1}{2}} - 1)}} \sqrt{\prod_{i=1}^4 \frac{(q^{s-\alpha} - z_i)(q^{-s+\alpha} - z_i)}{(q^s - z_i)(q^{-s+1} - z_i)}} \right) \\ \times \frac{q^{s-\frac{1}{2}} + 1}{q^{s-\alpha} + 1} \sqrt{\frac{(q^{s-1} + 1)(q^s + 1)}{(q^{s-\alpha-\frac{1}{2}} + 1)(q^{s-\alpha+\frac{1}{2}} + 1)}} = \varsigma.$$

Si se analiza la expresión de la segunda línea, se ve que dicha expresión es constante si y sólo si $\alpha = \frac{1}{2}$, y por tanto la condición (4.28) se transforma en

$$\sqrt{\frac{\prod_{i=1}^4 (q^{s-\frac{1}{2}} - z_i)(q^{-s+\frac{1}{2}} - z_i)}{\prod_{i=1}^4 (q^s - z_i)(q^{-s+1} - z_i)}} = \varsigma. \quad (4.37)$$

Luego, el caso más sencillo en el que dicha condición se satisface es cuando $z_1 z_2 = q^{\frac{1}{2}}$ y $z_3 z_4 = q^{\frac{1}{2}}$ (con las correspondientes permutaciones de las raíces), así $\varsigma = 1$. Dado que $\sigma(s) = \sigma(-s + \frac{1}{2})$, la condición (4.29) resulta

$$\frac{1}{\nabla x_1(s)} \left(\frac{\sigma(s + \frac{1}{2})}{\Delta x(s)} + \frac{\sigma(-s + \frac{1}{2})}{\nabla x(s)} - \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} - \frac{\sigma(-s)}{\Delta x(s)} \right) = 0.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\mathfrak{H}_q^{AW} = \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\uparrow} \circ \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\downarrow} \quad \text{y} \quad [\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\downarrow}, \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\uparrow}]_q = 0,$$

donde

$$\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\downarrow} = e^{\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\frac{\sigma(s)}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)}} - e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\frac{\sigma(-s)}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)}}, \\ \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\uparrow} = \sqrt{\frac{\sigma(s)}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)}} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} - \sqrt{\frac{\sigma(-s)}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)}} e^{\frac{1}{2}\partial_s}.$$

Luego los operadores $\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\downarrow}$ y $\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^{\uparrow}$ conmutan, de ahí que este caso no interese desde el punto de vista de las aplicaciones (por ejemplo, para modelos de q -osciladores armónicos). Un caso especial de los polinomios de Askey-Wilson es el de los q -polinomios continuos de Jacobi que resultan tomando [85]

$$a = q^{\frac{\alpha'}{2} + \frac{1}{4}}, \quad b = q^{\frac{\alpha'}{2} + \frac{3}{4}}, \quad c = -q^{\frac{\beta'}{2} + \frac{1}{4}}, \quad d = -q^{\frac{\beta'}{2} + \frac{3}{4}}.$$

Luego se puede resolver el problema 1 sólo para $\alpha' = \beta' = -\frac{1}{2}$.

El siguiente caso que se analizará es aquel en el que una de las raíces z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, se anula – este caso da lugar a los q -polinomios de 0-Askey-Wilson o q -polinomios continuos duales de Hahn [85] –. En este caso la condición (4.49) (o, equivalentemente, (4.37)) se satisface sólo cuando

$$(z_1, z_2, z_3) = (t, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{4}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pero con la elección anterior de los z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, es imposible satisfacer la segunda condición (4.50) por lo tanto es imposible obtener un álgebra dinámica cerrada sencilla.

□ Los q -polinomios continuos de Laguerre

Esta familia de q -polinomios se corresponde a los q -polinomios de Askey-Wilson donde dos de sus parámetros, dígame z_3 y z_4 , son nulos. La condición (4.49) implica que

$$z_1 z_2 = q^{\frac{1}{2}}.$$

Bajo esta condición, $\varsigma = q^{-\frac{1}{2}}$ y la segunda condición da lugar a

$$\Lambda = \frac{4C_\sigma(\sqrt{q} - 1)}{k_q^2}.$$

Por tanto, el q -Hamiltoniano asociado a las funciones asociadas a los q -polinomios continuos de Laguerre admite una factorización con un álgebra dinámica no trivial. Un caso particular de esta familia es el de los q -polinomios continuos de Laguerre $P_n^{(a)}(x|q)$ [85], $x \equiv x(s) = \cos \theta$, i.e. $q^s = e^{i\theta}$, donde $a = -\frac{1}{2}$ para los cuales el q -Hamiltoniano, tomando $A(s) = 1$, es de la forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_q^{cqL} = & -\frac{C_\sigma}{k_q \sin \theta} \left(\frac{\sqrt{(q^{s+1} - 1)(q^{s+1} - q^{\frac{1}{2}})(q^{-s} - 1)(q^{-s} - q^{\frac{1}{2}})}}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)} e^{-\partial_s} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{(q^s - 1)(q^s - q^{\frac{1}{2}})(q^{1-s} - 1)(q^{1-s} - q^{\frac{1}{2}})}}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)} e^{\partial_s} \right) \\ & + \frac{C_\sigma}{k_q \sin \theta} \left(\frac{(q^s - 1)(q^s - q^{\frac{1}{2}})}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)} + \frac{(q^{-s} - 1)(q^{-s} - q^{\frac{1}{2}})}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)} \right) I, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow &= \frac{\sqrt{-C_\sigma}}{k_q \sin \theta} \left(e^{\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{(q^s - 1)(q^s - q^{\frac{1}{2}})} - e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{(q^{-s} - 1)(q^{-s} - q^{\frac{1}{2}})} \right), \\ \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow &= \frac{\sqrt{-C_\sigma}}{k_q \sin \theta} \left(\sqrt{(q^s - 1)(q^s - q^{\frac{1}{2}})} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} - \sqrt{(q^{-s} - 1)(q^{-s} - q^{\frac{1}{2}})} e^{\frac{1}{2}\partial_s} \right). \end{aligned}$$

Luego para las funciones

$$\Phi_n^{cqL}(x(s)) = \sqrt{\frac{(q^{\frac{1}{2}}; q)_n (q, q^{\frac{1}{2}}; q)_\infty \omega(s)}{(q; q)_n}} {}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{-s}, q^s \\ q^{\frac{1}{2}}, 0 \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

se tiene que

$$\mathfrak{H}_q^{cqL} \Phi_n^{cqL}(s) = q(q^{-n} - 1) \Phi_n^{cqL}(s), \quad \mathfrak{H}_q^{cqL} = \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow \circ \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow,$$

$$[\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow, \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow]_{q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4C_\sigma(\sqrt{q} - 1)}{k_q^2}.$$

Por tanto, escogiendo

$$C_\sigma = -\frac{k_q^2}{4(1 - \sqrt{q})},$$

se obtiene la relación

$$[\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow, \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow]_{q^{-\frac{1}{2}}} = I.$$

El caso en el que los polinomios de Askey-Wilson tienen tres parámetros nulos – un ejemplo de este caso es el de los q -polinomios grandes de Hermite [85] – es análogo al caso de un solo parámetro nulo y el problema 1 no tiene solución.

□ Los q -polinomios continuos de Hermite

Finalmente, si se toman los polinomios de Askey-Wilson con los cuatro parámetros nulos, i.e. $a = b = c = d = 0$ (o $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$), se obtienen los q -polinomios continuos de Hermite [85].

En este caso $\sigma(z) = C_\sigma q^{2z}$. Si se elige $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$, dado que esta familia es un caso particular de los polinomios de Askey-Wilson se obtiene, usando que $\varsigma = q^{-1}$, que el q -Hamiltoniano es

$$\mathfrak{H}_q^{qcH} = \frac{-1}{k_q^2 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{C_\sigma q}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q) \sqrt{\sin(\theta + i \log q)}} e^{-\partial_s} + \frac{C_\sigma q}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q) \sqrt{\sin(\theta - i \log q)}} e^{\partial_s} \right) + \frac{1}{k_q^2 \sin \theta} \left(\frac{C_\sigma q^{2s}}{\sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)} + \frac{C_\sigma q^{-2s}}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)} \right) I,$$

siendo $q^s = e^{i\theta}$ y los operadores

$$\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow = e^{\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\frac{C_\sigma q^{2s}}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)}} - e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\frac{C_\sigma q^{-2s}}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)}},$$

$$\mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow = \sqrt{\frac{C_\sigma q^{2s}}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta + \frac{i}{2} \log q)}} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} - \sqrt{\frac{C_\sigma q^{-2s}}{-k_q^2 \sin \theta \sin(\theta - \frac{i}{2} \log q)}} e^{\frac{1}{2}\partial_s},$$

tales que

$$\mathfrak{H}_q^{qcH} = \mathfrak{a}^\uparrow \circ \mathfrak{a}^\downarrow \quad \text{y} \quad [\mathfrak{a}^\downarrow, \mathfrak{a}^\uparrow]_{q^{-1}} = \frac{4C_\sigma}{k_q}.$$

Nótese que para obtener relaciones de ς -conmutación normalizadas es suficiente tomar $C_\sigma = \frac{k_q}{4}$. Otra posible elección es $A(s) = 1$ [37]. En este caso las condiciones del Teorema 4.3 se satisfacen si $\varsigma = q^{-1}$, por tanto $\Lambda = 4C_\sigma k_q^{-1}$. Con esta elección la relación de ortogonalidad para las funciones Φ_n viene dado por

$$\int_{-1}^1 \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \delta_{n,m},$$

el Hamiltoniano es

$$\mathfrak{H}_q = \frac{C_\sigma q}{k_q^2} \left(\frac{e^{-\partial_s}}{\sin \theta \sin(\theta + \frac{i}{2} \ln q)} + \frac{e^{\partial_s}}{\sin(\theta - \frac{i}{2} \ln q) \sin \theta} - \frac{4}{\sqrt{q}} \left(1 - \frac{1+q}{q+q^{-1}-2\cos 2\theta} \right) I \right),$$

y

$$\mathfrak{a}^\downarrow := \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\downarrow = \frac{\sqrt{-C_\sigma}}{k_q \sin \theta} \left(e^{\frac{1}{2}\partial_s} q^s - e^{-\frac{1}{2}\partial_s} q^{-s} \right),$$

$$\mathfrak{a}^\uparrow := \mathfrak{a}_{\frac{1}{2}}^\uparrow = \frac{\sqrt{-C_\sigma}}{k_q \sin \theta} \left(q^s e^{-\frac{1}{2}\partial_s} - q^{-s} e^{\frac{1}{2}\partial_s} \right).$$

Con esta elección de los operadores, se tiene que

$$\mathfrak{H}_q = \mathfrak{a}^\uparrow \circ \mathfrak{a}^\downarrow \quad \text{y} \quad [\mathfrak{a}^\downarrow, \mathfrak{a}^\uparrow]_{q^{-1}} = \frac{4C_\sigma}{k_q}.$$

Como antes, uno puede normalizar dicha relación de ς -conmutación tomando $C_\sigma = \frac{k_q}{4}$. Este caso fue considerado por primera vez en [38] (véase también [16]).

En la siguiente sección se aplicarán los resultados obtenidos para los q -polinomios a los polinomios Δ -clásicos que, como se comentó anteriormente, se pueden obtener como casos límite de ciertas familias de q -polinomios (véase, por ejemplo, [85, §5]).

4.5. El álgebra dinámica para los polinomios Δ -clásicos

Como ya se comentó previamente, el objetivo consiste en ver que todos los casos dentro del marco de las ecuaciones en diferencias sobre la red uniforme $x(s) = s$ se pueden estudiar de una manera unificada.

Los ejemplos para los cuales se construirá un álgebra de simetrías dinámica serán los polinomios de Charlier, de Kravchuk y de Meixner. El caso Hahn es análogo pero mucho más engorroso por lo que se omitirá.

Nota 4.5.1. En [13] puede encontrarse la versión completa del trabajo desarrollado en esta sección.

4.5.1. Preliminares: los polinomios Δ -clásicos

La red uniforme $x(s) = s$ es la más sencilla (no trivial). En este caso la ecuación (2.1) tiene la forma

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \equiv x(s) = s. \quad (4.38)$$

donde $\sigma(x) := \tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)$ es un polinomio de grado a lo más 2 y $\tau(x) = \tilde{\tau}(x)$.

La ecuación anterior tiene soluciones polinómicas P_n , usualmente denominadas polinomios ortogonales Δ -clásicos, si y sólo si

$$\lambda = \lambda_n = -n\left(\tau' + (n-1)\frac{\sigma''}{2}\right).$$

Es bien conocido [115] que bajo ciertas condiciones las soluciones polinómicas de (4.38) son ortogonales. Por ejemplo, si

$$\sigma(a)\rho(a)a^k = \sigma(b)\rho(b)b^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

entonces las soluciones polinómicas, P_n , de (4.38) satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\langle P_n, P_m \rangle = \sum_{s=a}^{b-1} P_n(s) P_m(s) \rho(s) = d_n^2 \delta_{nm}, \quad (4.39)$$

donde la función peso $\rho(s)$ es solución de la ecuación en diferencias de tipo Pearson

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s), \quad \text{o} \quad \sigma(s+1)\rho(s+1) = (\sigma(s) + \tau(s))\rho(s). \quad (4.40)$$

En adelante se asumirá que los polinomios son mónicos, i.e.,

$$P_n(x) = x^n + k'_n x^{n-1} + \dots$$

Las soluciones polinómicas de (4.38) son los polinomios ortogonales Δ -clásicos (o *discretos*) de Hahn, Meixner, Kravchuk y Charlier y cuyos principales datos aparecen en la tabla 4.1. Además, dado que son funciones de tipo hipergeométrico, éstas se pueden expresar en términos de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_pF_q$. La representación para los polinomios mónicos de Hahn, Meixner, Kravchuk, y Charlier, viene dada por

$$h_n^{\alpha, \beta}(x, N) = \frac{(1-N)_n(\beta+1)_n}{(\alpha+\beta+n+1)_n} {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} -x, \alpha+\beta+n+1, -n \\ 1-N, \beta+1 \end{matrix} \middle| 1\right), \quad (4.41)$$

$$M_n^{\gamma, \mu}(x) = \frac{(\gamma)_n \mu^n}{(\mu-1)^n} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ \gamma \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{\mu}\right), \quad (4.42)$$

Tabla 4.1: Los polinomios ortogonales Δ -clásicos mónicos.

$P_n(x)$	Hahn $h_n^{\alpha,\beta}(x; N)$	Meixner $M_n^{\gamma,\mu}(x)$	Kravchuk $K_n^p(x)$	Charlier $C_n^\mu(x)$
$[a, b]$	$[0, N]$	$[0, \infty)$	$[0, N + 1]$	$[0, \infty)$
σ	$x(N + \alpha - x)$	x	x	x
τ	$(\beta + 1)(N - 1) - (\alpha + \beta + 2)x$	$(\mu - 1)x + \mu\gamma$	$\frac{Np-x}{1-p}$	$\mu - x$
$\sigma + \tau$	$(x + \beta + 1)(N - 1 - x)$	$\mu x + \gamma\mu$	$-\frac{p}{1-p}(x - N)$	μ
λ_n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$(1 - \mu)n$	$\frac{n}{1-p}$	n
ρ	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}$ $\alpha, \beta \geq -1, n \leq N-1$	$\frac{\mu^x \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}$ $\gamma > 0, \mu \in (0, 1)$	$\binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$ $p \in (0, 1), n \leq N-1$	$\frac{e^{-\mu} \mu^x}{\Gamma(x+1)}$ $\mu > 0$
d_n^2	$\frac{n! \Gamma(\alpha+\beta+N+n+1)}{(N-n-1)! (\alpha+\beta+n+1)_n} \binom{\alpha+\beta+2n+2}{\alpha+n+1}^{-1}$	$\frac{n! (\gamma)_n \mu^n}{(1-\mu)^{\gamma+2n}}$	$\binom{N}{n} p^n (1-p)^n$	$n! \mu^n$

$$K_n^p(x) = \frac{(-p)^n N!}{(N-n)!} {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{p} \right), \quad (4.43)$$

$$C_n^\mu(x) = (-\mu)^n {}_2\varphi_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{1}{\mu} \right). \quad (4.44)$$

Para más información relativa a los polinomios ortogonales sobre una red uniforme véase [9, 85, 115, 117].

4.5.2. Factorización de la ecuación en diferencias

Considérese el siguiente operador lineal en diferencias

$$\mathfrak{h}_1 = -\nu(s-1) e^{-\partial_s} - \nu(s) e^{\partial_s} + (2\sigma(s) + \tau(s))I, \quad (4.45)$$

donde $\nu(s) = \sqrt{\sigma(s+1)(\sigma(s) + \tau(s))}$, e I representa al operador identidad, y sea $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ el conjunto de las funciones normalizadas de los polinomios P_n , los cuales satisfacen la ecuación (4.38), y ρ es una solución de la ecuación de tipo Pearson (4.18). Si P_n posee la propiedad de ortogonalidad (4.39), entonces las funciones $\Phi_n(s)$ poseen la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \sum_{s=a}^{b-1} \Phi_n(s) \Phi_m(s) = \delta_{n,m}. \quad (4.46)$$

Usando la identidad $\nabla = \Delta - \nabla \Delta$ y la ecuación (4.38), se obtiene que

$$\mathfrak{h}_1 \Phi_n(s) = \lambda_n \Phi_n(s), \quad (4.47)$$

i.e., las funciones normalizadas Φ_n son autofunciones del Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$. Como antes se quieren encontrar dos operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, tales que

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbf{b} \circ \mathbf{a},$$

i.e., los operadores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ factorizan al Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$.

Definición 4.5.1. Sea α un número real. Se define la familia de α -operadores como

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\alpha^\downarrow &:= e^{-\alpha \partial_s} \left(e^{\partial_s} \sqrt{\sigma(s)} - \sqrt{\sigma(s) + \tau(s)} I \right), \\ \mathfrak{a}_\alpha^\uparrow &:= \left(\sqrt{\sigma(s)} e^{-\partial_s} - \sqrt{\sigma(s) + \tau(s)} I \right) e^{\alpha \partial_s}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

respectivamente.

De un cálculo directo (usando la identidad $e^{\partial_s} \circ \nabla = \Delta$) se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.5. Dado el Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$, definido en (4.45), los operadores $\mathfrak{a}_\alpha^\downarrow$ y $\mathfrak{a}_\alpha^\uparrow$, definidos en (4.48), son tales que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathfrak{h}_1(s) = \mathfrak{a}_\alpha^\uparrow \circ \mathfrak{a}_\alpha^\downarrow.$$

4.5.3. El álgebra dinámica para los polinomios de Charlier

El siguiente paso consiste en encontrar el álgebra dinámica, asociada con el operador $\mathfrak{h}_1$, o, equivalentemente, con la familia de polinomios correspondiente, es decir, encontrar los operadores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, que factoricen al Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$, o sea,

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbf{b} \circ \mathbf{a},$$

y tales que su conmutador satisfaga

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = I.$$

Teorema 4.6. Sea $\mathfrak{h}_1(s)$ definido en (4.45). Los operadores $\mathbf{b} = \mathfrak{a}_\alpha^\uparrow$ y $\mathbf{a} = \mathfrak{a}_\alpha^\downarrow$, dados en (4.48), factorizan al Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$ (4.45) y satisfacen la relación de conmutación $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \Lambda$ para cierto número complejo Λ , si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{\sigma(s - \alpha)(\sigma(s - \alpha) + \tau(s - \alpha))}{\sigma(s)(\sigma(s - 1) + \tau(s - 1))} = 1, \quad (4.49)$$

y

$$\sigma(s - \alpha + 1) + \sigma(s - \alpha) + \tau(s - \alpha) - 2\sigma(s) - \tau(s) = \Lambda. \quad (4.50)$$

Nota 4.5.2. Nótese que las condiciones (4.49) y (4.50) se verifican si y sólo si $\alpha = \frac{1}{2}$, en cuyo caso $\Lambda = \frac{\tilde{\sigma}''}{2} - \frac{\tilde{\tau}'}{2}$, o $\tilde{\sigma}'' = 0$, en cuyo caso $\Lambda = (1 - 2\alpha)\tilde{\sigma}'(0) - \alpha\tau'$.

La prueba del Teorema 4.6 es análoga a la del Teorema 4.3² así que no se incluirá. Usando los datos de los polinomios Δ -clásicos (véase la tabla 4.1), se sigue que las únicas soluciones del problema 1 corresponden al caso cuando $\sigma + \tau = \text{const.}$ y $\alpha = 0$, o al caso $\sigma = \text{const.}$ y $\alpha = 1$. El primero de estos casos coincide con los polinomios de Charlier. Además, en dicho caso $\lambda_n = n$.

Corolario 4.5.1. *Para el Hamiltoniano asociado a los polinomios de Charlier*

$$\mathfrak{h}_1^C = -\sqrt{s\mu} e^{-\partial_s} - \sqrt{(s+1)\mu} e^{\partial_s} + (s+\mu)I,$$

$$\mathfrak{h}_1^C \Phi_n^C(s) = n\Phi_n^C(s), \quad \Phi_n^C(s) = \sqrt{\frac{e^{-\mu}\mu^{s-n}}{s!n!}} C_n^\mu(s), \quad \mu > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Además, los operadores

$$\mathfrak{a}_0^\downarrow = \sqrt{s+1} e^{\partial_s} - \sqrt{\mu} I, \quad \mathfrak{a}_0^\uparrow = \sqrt{s} e^{-\partial_s} - \sqrt{\mu} I, \quad (4.51)$$

son tales que $\mathfrak{h}_1^C = \mathfrak{a}_0^\uparrow \circ \mathfrak{a}_0^\downarrow$, y $[\mathfrak{a}_0^\downarrow, \mathfrak{a}_0^\uparrow] = I$.

Nótese que, dado que $\mathfrak{h}_1 \Phi(s) = \lambda \Phi(s)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1[\mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi(s)] &= \mathfrak{a}_0^\uparrow \circ \mathfrak{a}_0^\downarrow[\mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi(s)] = (\mathfrak{a}_0^\downarrow \circ \mathfrak{a}_0^\uparrow(s) - 1)[\mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi(s)] \\ &= (\lambda - 1)[\mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi(s)], \\ \mathfrak{h}_1[\mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi(s)] &= \mathfrak{a}_0^\uparrow \circ \mathfrak{a}_0^\downarrow \circ \mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi(s) = \mathfrak{a}_0^\uparrow(\lambda + 1)\Phi(s) \\ &= (\lambda + 1)[\mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi(s)]. \end{aligned}$$

En otras palabras, si Φ es una autofunción del Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$, entonces $\mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi$ es una autofunción de $\mathfrak{h}_1$, asociada con el autovalor $\lambda - 1$, y $\mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi$ es una autofunción de $\mathfrak{h}_1$, asociado con el autovalor $\lambda + 1$. De hecho, en general $(\mathfrak{a}_0^\downarrow)^k \Phi$ y $(\mathfrak{a}_0^\uparrow)^k \Phi$ son también autofunciones correspondientes a los autovalores $\lambda - k$ y $\lambda + k$, respectivamente.

Usando las fórmulas precedentes para los polinomios de Charlier, se tiene que

$$\mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi_n^C(s) = U_n \Phi_{n+1}^C(s), \quad \mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi_n^C(s) = D_n \Phi_{n-1}^C(s), \quad (4.52)$$

donde U_n y D_n son ciertas constantes.

Si ahora se aplica $\mathfrak{a}_0^\uparrow$ a la primera ecuación de (4.52) y luego se utiliza la segunda y (4.47), se encuentra que $\lambda_n = D_n U_{n-1}$. Por otro lado, aplicando $\mathfrak{a}_0^\downarrow$ a la segunda ecuación en (4.52) y usando la primera, así como que

$$(\mathfrak{a}_0^\downarrow \circ \mathfrak{a}_0^\uparrow) \Phi_n^C(s) = (\lambda_n + 1) \Phi_n^C(s),$$

se obtiene que $1 + \lambda_n = U_n D_{n+1} = \lambda_{n+1}$, de donde se sigue que λ_n debe de ser una función lineal de n (que es, de nuevo, obvio a partir de la tabla 4.1).

Si se usan las condiciones de contorno $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b)$, así como la fórmula de suma por partes (o la regla de Leibniz), se obtiene que

$$\langle \mathfrak{a}_0^\downarrow \Phi_m, \Phi_n \rangle = \langle \Phi_m, \mathfrak{a}_0^\uparrow \Phi_n \rangle,$$

i.e., los operadores $\mathfrak{a}_0^\downarrow$ y $\mathfrak{a}_0^\uparrow$ son mutuamente adjuntos.

A partir de la igualdad anterior (la propiedad ser mutuamente adjuntos) y (4.52) se sigue que

$$D_{n+1} = U_n,$$

de ahí que $U_n^2 = \lambda_{n+1}$, por tanto $U_n = \sqrt{\lambda_{n+1}}$ y $D_n = \sqrt{\lambda_n}$, i.e., se tiene el siguiente

²Bastaría tomar $\varsigma = 1$ y $x(s) = s$ y de las condiciones (4.28) y (4.29) se deducen las condiciones (4.49) y (4.50).

Corolario 4.5.2. Los operadores $\mathbf{a}_0^\dagger$ y $\mathbf{a}_0^\downarrow$ son mutuamente adjuntos respecto al producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0^\dagger \Phi_n^C(s) &= (\sqrt{s} e^{-\partial_s} - \sqrt{\mu} I) \Phi_n^C(s) = \sqrt{n+1} \Phi_{n+1}^C(s), \\ \mathbf{a}_0^\downarrow \Phi_n^C(s) &= (\sqrt{s+1} e^{\partial_s} - \sqrt{\mu} I) \Phi_n^C(s) = \sqrt{n} \Phi_{n-1}^C(s).\end{aligned}\quad (4.53)$$

A partir del Corolario anterior se puede deducir que

$$\sqrt{s+1} \Phi_0^C(s+1) - \sqrt{\mu} \Phi_0^C(s) = 0,$$

por tanto

$$\Phi_0^C(s) = N_0 \sqrt{\frac{\mu^s}{s!}}.$$

Usando la ortonormalidad de Φ_0^C , se tiene que $N_0 = e^{-\frac{\mu}{2}}$. Por tanto,

$$\Phi_n^C(s) = \frac{1}{\sqrt{n!}} [\mathbf{a}_0^\dagger(s)]^n \Phi_0^C(s) = \frac{1}{\sqrt{n!}} [\sqrt{s} e^{\partial_s} - \sqrt{\mu} I]^n \left(\sqrt{\frac{e^{-\mu} \mu^s}{s!}} \right).$$

Nótese que

$$[\mathfrak{h}_1, \mathbf{a}_0^\dagger] = \sqrt{\mu}(\mu-1)I + \mu \mathbf{a}_0^\dagger, \quad [\mathfrak{h}_1, \mathbf{a}_0^\downarrow] = -\sqrt{\mu}(\mu-1)I - \mu \mathbf{a}_0^\downarrow. \quad (4.54)$$

Este ejemplo constituye un análogo discreto del oscilador armónico cuántico (véase e.g. [36]).

4.5.4. El álgebra dinámica para los polinomios de Meixner y Kravchuk

Como se ha visto, el problema 1 sólo tiene solución para la familia de los polinomios de Charlier. ¿Qué hacer en los demás casos? Para dar respuesta a esta cuestión, se van a considerar los siguiente operadores:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \sqrt{\sigma(s+1)} e^{\frac{1}{2}\partial_s} - \sqrt{\sigma(s-1) + \tau(s-1)} e^{-\frac{1}{2}\partial_s}, \\ \mathbf{a}^+ &= e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\sigma(s+1)} - e^{\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\sigma(s-1) + \tau(s-1)}.\end{aligned}\quad (4.55)$$

Para tales operadores

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^+ + (\tau' - \sigma'')I.$$

Así que se define un nuevo Hamiltoniano, $\mathfrak{h}_2$, y unos operadores, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^+$, de la siguiente forma:

$$\mathfrak{h}_2 = C_a^2 \mathfrak{h}_1 + E I, \quad \mathbf{b} = C_a \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}^+(s) = C_a \mathbf{a}^+, \quad (4.56)$$

donde C_a y E son ciertas constantes (que se fijarán más adelante). Nótese que a partir de (4.47) se sigue que las autofunciones de $\mathfrak{h}_2$ son las mismas, pero los autovalores son distintos, de hecho,

$$\mathfrak{h}_2 \Phi_n(s) = (C_a^2 \lambda_n + E) \Phi_n(s). \quad (4.57)$$

Además

$$\mathfrak{h}_2 = \mathbf{b} \circ \mathbf{b}^+ + ((\tau' - \sigma'')C_a^2 + E)I, \quad (4.58)$$

y

$$\begin{aligned}[\mathbf{b}, \mathbf{b}^+] &= C_a^2 \sqrt{\sigma(s + \frac{1}{2})(\sigma(s - \frac{3}{2}) + \tau(s - \frac{3}{2}))} e^{-\partial_s} \\ &\quad + C_a^2 \sqrt{\sigma(s + \frac{3}{2})(\sigma(s - \frac{1}{2}) + \tau(s - \frac{1}{2}))} e^{\partial_s} \\ &\quad + \mathfrak{h}_2 - C_a^2(2\sigma(s) + \tau(s))I + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\sigma'' - \tau')C_a^2 I,\end{aligned}\quad (4.59)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] &= \sqrt{\sigma(s + \frac{1}{2})(\sigma(s - \frac{3}{2}) + \tau(s - \frac{3}{2}))} e^{-\partial_s} \\ &\quad + \sqrt{\sigma(s + \frac{3}{2})(\sigma(s - \frac{1}{2}) + \tau(s - \frac{1}{2}))} e^{\partial_s} \\ &\quad + \mathfrak{h}_1 - (2\sigma(s) + \tau(s))I + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\sigma'' - \tau')I. \end{aligned}$$

La parte derecha de (4.59) sugiere usar los siguientes operadores

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= C_b \mathbf{b} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} \sqrt{\sigma(s+1)} = C_b C_a (\sigma(s+1)I - e^{-\partial_s} \nu(s)), \\ \mathbf{c}^+ &= C_b \sqrt{\sigma(s+1)} e^{\frac{1}{2}\partial_s} \mathbf{b}^+ = C_b C_a (\sigma(s+1)I - \nu(s) e^{\partial_s}), \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde, como antes,

$$\nu(s) = \sqrt{\sigma(s+1)(\sigma(s) + \tau(s))}.$$

Así,

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_2, \mathbf{c}] &= -C_a^2(\sigma'' - \tau')\mathbf{c} + C_a C_b (\mathfrak{h}_2 + ((\sigma'' - \tau')C_a^2 - E)I) \sigma'(s + \frac{1}{2}), \\ [\mathfrak{h}_2, \mathbf{c}^+] &= C_a^2(\sigma'' - \tau')\mathbf{c}^+ - C_a C_b \sigma'(s + \frac{1}{2}) (\mathfrak{h}_2 + ((\sigma'' - \tau')C_a^2 - E)I), \\ [\mathbf{c}, \mathbf{c}^+] &= C_a^2 C_b^2 \left(\sigma'(s + \frac{1}{2}) e^{-\partial_s} \nu(s) + \nu(s) e^{\partial_s} \sigma'(s + \frac{1}{2}) - (\nu^2(s) - \nu^2(s-1))I \right). \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores dan lugar al siguiente resultado:

Teorema 4.7. Si $\sigma'' = 0$, los operadores $\mathfrak{h}_2$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}^+$, definidos por (4.58) y (4.60), respectivamente, forman el álgebra cerrada definida por las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}_2, \mathbf{c}] &= \tau' C_a^2 \mathbf{c} + C_b C_a \sigma'(0) (\mathfrak{h}_2 - (\tau' C_a^2 + E)I), \\ [\mathfrak{h}_2, \mathbf{c}^+] &= -\tau' C_a^2 \mathbf{c}^+ - C_b C_a \sigma'(0) (\mathfrak{h}_2 - (\tau' C_a^2 + E)I), \\ [\mathbf{c}, \mathbf{c}^+] &= C_a^2 C_b^2 \left(-\tau' \sigma - \sigma'(0) \mathfrak{h}_1 \right). \end{aligned}$$

Obsérvese también que con dicha la elección, $\sigma'(s + \frac{1}{2}) = \sigma'(0)$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \mathbf{c}^+ &= C_b C_a (\mathfrak{h}_1 + (2\sigma'(0) + \tau(s))I), \\ \nu^2(s) - \nu^2(s-1) &= \sigma'(0)(2\sigma(s) + \tau(s)) + \tau' \sigma(s). \end{aligned}$$

Además, usando las condiciones de contorno $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c} \Phi_n, \Phi_m \rangle &= C_a C_b \sum_{s=a}^{b-1} \sigma(s+1) \Phi_n(s) \Phi_m(s) - \sum_{s=a}^{b-1} \nu(s-1) \Phi_n(s-1) \Phi_m(s) \\ &= C_a C_b \sum_{s=a}^{b-1} \sigma(s+1) \Phi_n(s) \Phi_m(s) - C_a C_b \sum_{s=a}^{b-1} \nu(s) \Phi_n(s) \Phi_m(s+1) \\ &= \langle \Phi_n, \mathbf{c}^+ \Phi_m \rangle, \end{aligned}$$

i.e., se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 4.8. Los operadores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}^+$ son mutuamente adjuntos.

Nótese que los operadores $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son operadores autoadjuntos.

Nota 4.5.3. Dado que

$$\lambda = \lambda_n = -n(\tilde{\tau}' + (n-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}),$$

$\sigma'' = 0$ es equivalente a que λ_n sea una función lineal de n . En este caso $\lambda_n = -n\tau'$.

A continuación se considera exclusivamente el caso cuando $\sigma'' = 0$, i.e., el caso de los polinomios de Meixner, de Kravchuk, y de Charlier.

Si se definen los operadores

$$\begin{aligned} K_0 &= -\frac{1}{\tau' C_a^2} \mathfrak{h}_2 \\ K_- &= -\tau' C_a^2 \mathbf{c} - C_b C_a \sigma'(0) (\mathfrak{h}_2 - \tau' C_a^2 - E) I, \\ K_+ &= -\tau' C_a^2 \mathbf{c}^+ - C_b C_a \sigma'(0) (\mathfrak{h}_2 - \tau' C_a^2 - E) I, \end{aligned} \quad (4.61)$$

entonces

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad \text{y} \quad [K_-, K_+] = A_0 K_0 + A_1,$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\tau' \sigma'(0) C_b^2 C_a^4 (\tau' C_a^2) (\sigma'(0) + \tau'), \\ A_1 &= \frac{A_0}{\tau' C_a^2} E + C_b^2 C_a^6 \tau'^2 (\sigma'(0) \tau(0) - \sigma(0) \tau'). \end{aligned}$$

El caso $A_0 = 0$ corresponde al caso Charlier (véase la subsección previa). Si $A_0 \neq 0$, se tienen dos posibilidades: $A_0 > 0$ y $A_0 < 0$. A continuación se elegirá

$$C_a^2 = -\frac{1}{\tau'}.$$

En el primer caso, es decir $A_0 > 0$, uno puede elegir C_b y E de manera que $A_0 = 2$ y $A_1 = 0$. Por tanto

$$C_b^2 = \frac{-\tau'}{\sigma'(0)(\tau' + \sigma'(0))}, \quad E = -\frac{\sigma'(0)\tau(0) - \sigma(0)\tau'}{2\tau'} C_b^2. \quad (4.62)$$

En consecuencia, los operadores $K_{\pm}$ y K_0 son tales que

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad \text{y} \quad [K_-, K_+] = 2K_0. \quad (4.63)$$

Es decir, en este caso el álgebra dinámica es el álgebra $\text{Sp}(2, \mathfrak{R})$.

En el segundo caso, es decir $A_0 < 0$, uno puede elegir C_b y E de manera que $A_0 = -2$ y $A_1 = 0$. Por tanto

$$C_b^2 = \frac{\tau'}{\sigma'(0)(\tau' + \sigma'(0))}, \quad E = \frac{\sigma'(0)\tau(0) - \sigma(0)\tau'}{2\tau'} C_b^2. \quad (4.64)$$

En consecuencia, los operadores $K_{\pm}$ y K_0 son tales que

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad \text{y} \quad [K_+, K_-] = 2K_0. \quad (4.65)$$

Es decir, en este caso el álgebra dinámica es el álgebra $\text{so}(3)$.

Nótese que dado que el operador $\mathfrak{h}_2$ es autoadjunto, los operadores $K_{\pm}$ son mutuamente adjuntos en ambos casos, o sea

$$\langle K_+ \Phi_m, \Phi_n \rangle = \langle \Phi_m, K_- \Phi_n \rangle, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

4.5.5. El álgebra de simetrías $\text{Sp}(2, \mathfrak{R})$

Se considerará el primer caso considerando el operador

$$K^2 = K_0^2 - K_0 - K_+ \circ K_-, \quad (4.66)$$

donde K_0 , K_+ y K_- son los operadores dados en (4.61). De un cálculo directo resulta que

$$K^2 = E(E-1)I, \quad E = \frac{\tau(0)\sigma'(0) - \tau'\sigma(0)}{2\sigma'(0)(\sigma'(0) + \tau')},$$

donde E viene dado por (4.62), es decir, K^2 es el operador de Casimir – el cual es invariante en dicho álgebra –.

En este caso se tiene la siguiente relación para las funciones normalizadas:

$$K^2\Phi_n(s) = E(E-1)\Phi_n(s), \quad K_0\Phi_n(s) = (n+E)\Phi_n(s). \quad (4.67)$$

Ahora usando la relación de conmutación (4.63), es sencillo ver que

$$(K_0 \circ K_{\pm})\Phi_n(s) = (n+E \pm 1)K_{\pm}\Phi_n(s).$$

En consecuencia, a partir de (4.67) y de la última expresión se deduce que

$$K_+\Phi_n(s) = \tilde{\kappa}_n\Phi_{n+1}(s), \quad K_-\Phi_n(s) = \kappa_n\Phi_{n-1}(s).$$

Empleando el hecho que los operadores $K_{\pm}$ son mutuamente adjuntos, se obtiene que

$$\tilde{\kappa}_n = \langle K_+\Phi_n, \Phi_{n+1} \rangle = \langle \Phi_n, K_-\Phi_{n+1} \rangle = \kappa_{n+1}.$$

Por tanto

$$K_+\Phi_n(s) = \kappa_{n+1}\Phi_{n+1}(s) \quad \text{y} \quad K_-\Phi_n(s) = \kappa_n\Phi_{n-1}(s). \quad (4.68)$$

Para calcular κ_n , se usa (4.67) y (4.68), obteniéndose que $E(E-1) = (n+E)^2 - (n+E) - \kappa_n^2$, luego

$$\kappa_n = \sqrt{n(n+2E-1)}.$$

En este caso, las funciones $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ definen una base para la representación irreducible unitaria $D^+(-E)$ de $\text{Sp}(2, \mathfrak{R})$.

A partir de la fórmula anterior se sigue que las funciones Φ_n pueden obtenerse de forma recursiva via la aplicación del operador K_+ , i.e.,

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{\kappa_1 \cdots \kappa_n} K_+^n(s) \Phi_0(s), \quad \Phi_0(s) = d_0^{-1} \sqrt{\rho(s)}.$$

donde ρ es la función peso de la familia de polinomios ortogonales correspondiente y d_0 representa la norma de P_0 .

4.5.6. Las funciones de Meixner

Dichas funciones vienen dadas por

$$\Phi_n^M(s) = \mu^{\frac{s-n}{2}} (1-\mu)^{\frac{\gamma}{2}+n} \sqrt{\frac{(\gamma)_s}{s!n!(\gamma)_n}} M_n^{\gamma,\mu}(s), \quad n \geq 0,$$

y su Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$

$$\mathfrak{h}_1^M = -\sqrt{\mu s(s+\gamma-1)} e^{-\partial_s} - \sqrt{\mu(s+1)(s+\gamma)} e^{\partial_s} + (s+\mu(s+\gamma)) I,$$

por tanto

$$\mathfrak{h}_1^M \Phi_n^M(s) = n \Phi_n^M(s).$$

En este caso se tiene que

$$C_a = \sqrt{\frac{1}{1-\mu}}, \quad C_b = \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}, \quad y \quad E = \frac{\gamma}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\sqrt{\frac{(s-1+\gamma)\mu}{1-\mu}} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} + \sqrt{\frac{s+1}{1-\mu}} e^{\frac{1}{2}\partial_s}, \\ \mathbf{b}^+ &= -\sqrt{\frac{(s-\frac{1}{2}+\gamma)\mu}{1-\mu}} e^{\frac{1}{2}\partial_s} + \sqrt{\frac{s+\frac{1}{2}}{1-\mu}} e^{-\frac{1}{2}\partial_s}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{h}_2^M = \frac{1}{1-\mu} \mathfrak{h}_1^M + \frac{\gamma}{2} = \mathbf{b} \circ \mathbf{b}^+ + \frac{\gamma}{2} - 1.$$

De hecho, en este caso,

$$\mathfrak{h}_2^M \Phi_n^M(s) = \left(n + \frac{\gamma}{2}\right) \Phi_n^M(s),$$

$$K_0 = -\sqrt{s(s-1+\gamma)} \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} e^{-\partial_s} - \sqrt{(s+1)(s+\gamma)} \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} e^{\partial_s} + \left(s + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{1+\mu}{1-\mu} I,$$

$$K_+ = -\frac{\sqrt{s(s-1+\gamma)}}{1-\mu} e^{-\partial_s} - \frac{\mu\sqrt{(s+1)(s+\gamma)}}{1-\mu} e^{\partial_s} + \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} (2s+\gamma) I,$$

$$K_- = -\frac{\mu\sqrt{s(s-1+\gamma)}}{1-\mu} e^{-\partial_s} - \frac{\sqrt{(s+1)(s+\gamma)}}{1-\mu} e^{\partial_s} + \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} (2s+\gamma) I,$$

con

$$K_0 \Phi_n^M(s) = \left(n + \frac{\gamma}{2}\right) \Phi_n^M(s), \quad K^2(s) \Phi_n^M(s) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\gamma}{2} - 1\right) \Phi_n^M(s),$$

$$K_+ \Phi_n^M(s) = \sqrt{(n+1)(n+\gamma)} \Phi_{n+1}^M(s),$$

(4.69)

$$K_- \Phi_n^M(s) = \sqrt{n(n+\gamma-1)} \Phi_{n-1}^M(s).$$

Usando el hecho que $\mathfrak{h}_2^M \Phi_0^M(s) = \frac{\gamma}{2} \Phi_0^M(s)$, junto con las fórmulas (4.61) y (4.69), se tiene que

$$0 = K_- \Phi_0^M(s) = \sqrt{s(s-1+\gamma)} \Phi_0^M(s-1) - s\mu^{-\frac{1}{2}} \Phi_0^M(s),$$

y por tanto

$$\Phi_0^M(s) = \sqrt{\frac{(1-\mu)^\gamma}{\Gamma(\gamma)}} \sqrt{\frac{\mu^s \Gamma(\gamma+s)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(s+1)}},$$

y

$$\Phi_n^M(s) = \sqrt{\frac{(1-\mu)^\gamma}{n!\Gamma(\gamma+n)}} K_+^n \left[\sqrt{\frac{\mu^s \Gamma(\gamma+s)}{\Gamma(s+1)}} \right].$$

Un resultado similar se ha obtenido antes en [36].

4.5.7. El álgebra de simetrías $\mathfrak{so}(3)$

Considérese ahora el segundo caso, i.e. $A_0 < 0$. Se define el operador

$$K^2 = K_0^2 + K_0 + K_- \circ K_+, \quad (4.70)$$

donde K_0 , K_+ , y K_- son los operadores definidos en (4.61). Sustituyendo el valor de E , dado en (4.64), y realizando algunos cálculos sencillos se obtiene que

$$K^2 = E(E-1)I, \quad E = \frac{\tau(0)\sigma'(0) - \tau'\sigma(0)}{2\sigma'(0)(\sigma'(0) + \tau')},$$

es decir, K^2 es el operador de Casimir.

Además, si se definen las funciones normalizadas como

$$\Phi_n(s) = d_n^{-1} \sqrt{\rho(s)} P_n(s),$$

se tiene

$$K^2 \Phi_n(s) = E(E-1)\Phi_n(s), \quad K_0 \Phi_n(s) = (n+E)\Phi_n(s). \quad (4.71)$$

Ahora usando la relación de conmutación (4.65), se obtiene que

$$(K_0 \circ K_{\pm}) \Phi_n(s) = (n+E \pm 1) K_{\pm} \Phi_n(s).$$

En consecuencia, a partir de (4.67) y la expresión anterior, se concluye que

$$K_+ \Phi_n(s) = \tilde{\kappa}_n \Phi_{n+1}(s), \quad K_- \Phi_n(s) = \kappa_n \Phi_{n-1}(s).$$

Usando el hecho que los operators $K_{\pm}$ son mutuamente adjuntos, se deduce que

$$\tilde{\kappa}_n = \langle K_+ \Phi_n, \Phi_{n+1} \rangle = \langle \Phi_n, K_- \Phi_{n+1} \rangle = \kappa_{n+1},$$

por tanto

$$K_+ \Phi_n(s) = \kappa_{n+1} \Phi_{n+1}(s), \quad K_- \Phi_n(s) = \kappa_n \Phi_{n-1}(s). \quad (4.72)$$

Para calcular κ_n , se usará (4.67) y (4.72) obteniéndose que $E(E-1) = (n+E)^2 + (n+E) + \kappa_{n+1}^2$, luego

$$\kappa_n = \sqrt{-n(n+2E-1)}.$$

En este caso las funciones $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ definen una base para la representación irreducible unitaria $D(-E)$ del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Como en el caso anterior, a partir de la fórmula anterior se sigue que las funciones Φ_n pueden obtenerse recursivamente via la aplicación del operador K_+ , i.e.,

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{\kappa_1 \cdots \kappa_n} K_+^n(s) \Phi_0(s), \quad \Phi_0(s) = d_0^{-1} \sqrt{\rho(s)}.$$

donde ρ es la función peso de la familia de polinomios ortogonales correspondiente y d_0 representa la norma de P_0 .

4.5.8. Las funciones de Kravchuk

Dichas funciones viene dadas por

$$\Phi_n^K(s) = p^{\frac{s-n}{2}} (1-p)^{\frac{N-n-s}{2}} \sqrt{\frac{n!(N-n)!}{s!(N-s)!}} K_n^p(s, N), \quad 0 \leq n \leq N,$$

y su Hamiltoniano $\mathfrak{h}_1$ por

$$\mathfrak{h}_1^K = -\frac{\sqrt{ps(N-s+1)}}{\sqrt{1-p}} e^{-\partial_s} + \frac{Np+s-2ps}{1-p} I - \frac{\sqrt{p(s+1)(N-s)}}{\sqrt{1-p}} e^{\partial_s},$$

por tanto

$$\mathfrak{h}_1^K \Phi_n^K(s) = n \Phi_n^K(s).$$

En este caso,

$$C_a = \sqrt{1-p}, \quad C_b = \sqrt{p^{-1}}, \quad y \quad E = -\frac{N}{2},$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\sqrt{p(N-s+1)} e^{-\frac{1}{2}\partial_s} + \sqrt{(1-p)(s+1)} e^{\frac{1}{2}\partial_s}, \\ \mathbf{b}^+ &= -\sqrt{p(N-s+\frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}\partial_s} + \sqrt{(1-p)(s+\frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}\partial_s}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{h}_2^K = (1-p) \mathfrak{h}_1^K - \frac{N}{2} = \mathbf{b} \circ \mathbf{b}^+ - \left(\frac{N}{2} + 1\right) I.$$

Además,

$$\mathfrak{h}_2^K \Phi_n^K(s) = \left(n - \frac{N}{2}\right) \Phi_n^K(s),$$

siendo

$$\begin{aligned} K_0 &= -\sqrt{p(1-p)s(N-s+1)} e^{-\partial_s} - \sqrt{p(1-p)(s+1)(N-s)} e^{\partial_s} \\ &\quad + [N(p - \frac{1}{2}) - s(2p-1)]I, \\ K_+ &= (1-p)\sqrt{s(N-s+1)} e^{-\partial_s} + p\sqrt{(s+1)(N-s)} e^{\partial_s} - \sqrt{p(1-p)}(2s-N)I, \\ K_- &= p\sqrt{s(N-s+1)} e^{-\partial_s} + (1-p)\sqrt{(s+1)(N-s)} e^{\partial_s} - \sqrt{p(1-p)}(2s-N)I, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K_0 \Phi_n^K(s) &= \left(n - \frac{N}{2}\right) \Phi_n^K(s), \quad K^2 \Phi_n^K(s) = \frac{N}{4} (N+2) \Phi_n^K(s), \\ K_+ \Phi_n^K(s) &= \sqrt{(n+1)(N-n)} \Phi_{n+1}^K(s), \\ K_- \Phi_n^K(s) &= \sqrt{n(N-n+1)} \Phi_{n-1}^K(s). \end{aligned} \tag{4.73}$$

Usando el hecho que $\mathfrak{h}_2^K \Phi_0^K(s) = -\frac{N}{2} \Phi_0^K(s)$, junto a las fórmulas (4.61) y (4.73), se encuentra que

$$0 = K_- \Phi_0^K(s) = \sqrt{\frac{p}{1-p}} \left(s \Phi_0^K(s) - \sqrt{\frac{ps(N-s+1)}{1-p}} \Phi_0^K(s-1) \right).$$

Por tanto se tiene la siguiente representación para las funciones normalizadas

$$\Phi_0^K(s) = p^{\frac{s-n}{2}} (1-p)^{\frac{N-n-s}{2}} \sqrt{\frac{n!(N-n)!}{s!(N-s)!}},$$

y

$$\Phi_n^K(s) = \sqrt{\frac{(N-n)!(1-p)^{N-n}}{N!p^n}} (K_+)^n \left[\binom{N}{s} \left(\frac{p}{1-p} \right)^s \right].$$

Un q -análogo de los polinomios de Racah y el álgebra cuántica $SU_q(2)$

5.1. Introducción

En la publicación [31] una familia de polinomios ortogonales que generaliza a los polinomios de Racah (o *6j-símbolos*) fue introducida: los denominados polinomios de Racah. Estos polinomios, como ya se mencionó anteriormente, están en la cima del esquema de Askey (véase, por ejemplo, [85]) el cual contiene todas las familias de polinomios ortogonales hipergeométricos. Algunos años más tarde los mismos autores [32] introdujeron los conocidos polinomios de Askey-Wilson así como una q -versión de los antes mencionados polinomios de Racah. Una de las propiedades más importantes de estos polinomios es que a partir de ellos uno puede obtener todas las familias conocidas de polinomios ortogonales clásicos de tipo hipergeométrico como casos límite (para una revisión de esto véase el manuscrito [85]). La principal herramienta en estos dos trabajos fueron las series hipergeométricas estándar y básicas, respectivamente. Por otro lado, los autores de [116] (véase también [115]) consideraron los q -polinomios como una solución de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden de tipo hipergeométrico sobre la red $x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3$. En particular, vieron que la solución de la ecuación de tipo hipergeométrico puede expresarse como cierta serie hipergeométrica básica y, en ese sentido, recuperaron los resultados de R. Askey y R. Wilson.

El interés de los polinomios de Askey-Wilson y de q -Racah aumentó (y el de los q -polinomios en general) tras la aparición de las q -álgebras y los grupos cuánticos [60, 62, 75, 82, 125]. Sin embargo, de los primeros intentos de construir un q -análogo del formalismo de Wigner-Racah para el álgebra cuántica más simple $U_q(su(2))$ [82] (véase también [6, 25, 99]), quedó claro que para obtener los q -polinomios conectados con los coeficientes de Racah y los coeficientes de Clebsch-Gordan era mejor utilizar familias definidas sobre una red diferente a la usual (en el caso de los q -Racah ésta era la red $x(s) = q^{-s} + \delta q^{-N} q^s$ que depende no sólo de la variable s sino también de los parámetros de los polinomios). Así pues, se considerarán los polinomios en la red

$$x(s) = [s]_q [s + 1]_q, \quad (5.1)$$

que sólo depende de s , donde, como antes, $[s]_q$ denotan los q -números (en su forma simétrica)

$$[s]_q = \frac{q^{\frac{s}{2}} - q^{-\frac{s}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (5.2)$$

Nota 5.1.1. Nótese que para el caso de los polinomios duales de Hahn esta red ya había sido usada (véase [25]).

Con esta elección los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, son proporcionales a los coeficientes de q -Racah (o $6j$ -símbolos) del álgebra cuántica $U_q(su(2))$.

Además, esta conexión da lugar a la posibilidad de realizar un estudio más profundo del formalismo de Wigner-Racah (o el q -análogo de la Teoría cuántica del momento angular [129, 130, 131, 132]) para las álgebras cuánticas $U_q(su(2))$ y $U_q(su(1, 1))$ usando la Teoría de los q -polinomios ortogonales. Por otro lado, usando el q -análogo de la Teoría cuántica del momento angular se pueden obtener algunos resultados relacionados con los q -polinomios, algunos de los cuales no son triviales desde el punto de vista de la teoría de los polinomios ortogonales (véase, por ejemplo, las referencias [25, 27, 86, 137]). Aquí se presenta un estudio detallado de dos q -análogos de los polinomios de Racah sobre la red (5.1): los $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ y los $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ así como su conexión con los coeficientes q -Racah (o $6j$ -símbolos) del álgebra cuántica $U_q(su(2))$.

5.1.1. Los q -polinomios de Racah $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

Aquí se considerarán los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, sobre la red

$$x(s) = [s]_q[s+1]_q = q^{\frac{1}{2}}\kappa_q^{-2}(q^s + q^{-s-1} - (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})\kappa_q^{-2}), \quad (5.3)$$

introducidos en [7, 99, 115]. Para esta familia,

$$\sigma(s) = -\frac{q^{-2s}}{\kappa_q^4 q^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}(q^s - q^a)(q^s - q^{-b})(q^s - q^{\beta-a})(q^s - q^{b+\alpha}) = [s-a]_q[s+b]_q[s+a-\beta]_q[b+\alpha-s]_q.$$

De hecho, los autovalores vienen dados por

$$\lambda_n = q^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2n+1)}\kappa_q^{-2}(1 - q^n)(1 - q^{\alpha+\beta+n+1}) = [n]_q[n+\alpha+\beta+1]_q.$$

Para obtener $\tau_n(s)$ se usa (2.28), por tanto

$$\tau_n(s) = \tau'_n x_n(s) + \tau_n(0), \quad \tau'_n = -[2 + 2n + \alpha + \beta]_q, \quad \tau_n(0) = \sigma(-n-1) - \sigma(-n). \quad (5.4)$$

Tendiendo en cuenta que $\tau(s) = \tau_0(s)$, se obtiene que

$$\tau(s) = -[2 + \alpha + \beta]_q x(s) + \sigma(-1) - \sigma(0).$$

5.1.2. La propiedad de ortogonalidad y la norma d_n

Una solución de la ecuación en diferencias tipo Pearson (2.40) es

$$\rho(s) = \frac{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)}.$$

Dado que $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0$, entonces los q -polinomios de Racah satisfacen la propiedad de ortogonalidad

$$\sum_{s=a}^{b-1} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q u_m^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \rho(s) [2s+1]_q = 0, \quad n \neq m,$$

con las restricciones $-\frac{1}{2} < a \leq b-1$, $\alpha > -1$, $-1 < \beta < 2a+1$. Se calculará a continuación el cuadrado de la norma, d_n^2 . Dado que

$$\rho_n(s) = \frac{\tilde{\Gamma}_q(s+n+a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}_q(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}_q(s-a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+b+1)\tilde{\Gamma}_q(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(b-s-n)},$$

y

$$A_{n,n} = [n]_q!(-1)^n \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)}{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1)},$$

se tiene

$$\Lambda_n := (-1)^n A_{n,n} B_n^2 = \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)}{[n]_q! \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Teniendo en cuenta que $\nabla x_{n+1}(s) = [2s+n+1]_q$, y usando (2.43), junto a la identidad

$$\tilde{\Gamma}(\zeta-s) = \frac{\tilde{\Gamma}(\zeta)(-1)^s}{(1-\zeta|q)_s}, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad (5.5)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \Lambda_n \sum_{s=a}^{b-n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_q(s+n+a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}_q(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}_q(s-a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+b+1)\tilde{\Gamma}_q(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(b-s-n)[2s+n+1]_q^{-1}} \\ &= \Lambda_n \sum_{s=0}^{b-a-n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_q(s+n+2a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n+\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(s+n+\alpha+b+a+1)\tilde{\Gamma}_q(b-a+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}_q(s+1)\tilde{\Gamma}_q(s+b+a+1)\tilde{\Gamma}_q(s+2a-\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(b-a-s-n)[2s+2a+n+1]_q^{-1}} \\ &= \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)\tilde{\Gamma}_q(2a+n+1)\tilde{\Gamma}_q(n+\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(a+b+n+\alpha+1)\tilde{\Gamma}_q(b+\alpha-a)}{[n]_q! \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}_q(a+b+1)\tilde{\Gamma}_q(2a-\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(b-a-n)} \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{b-a-n-1} \frac{(n+2a+1, n+\beta+1, n+a+\alpha+b+1, 1-b+a+n|q)_s}{(1, a+b+1, 2a-\beta+1, 1-b+a-\alpha|q)_s [2s+2a+n+1]_q^{-1}}. \end{aligned}$$

En lo que sigue se denotará por S_n la suma en la última expresión. Si se usa que

$$(\zeta|q)_n = (-1)^n (q^\zeta; q)_n q^{-\frac{n}{4}(n+2\zeta-1)} \kappa_q^{-n},$$

así como la identidad

$$[2s+2a+n+1]_q = q^{-s} [2a+n+1]_q \frac{(q^{a+\frac{n+1}{2}+1}; q)(-q^{a+\frac{n+1}{2}+1}; q)_s}{(q^{a+\frac{n+1}{2}}; q)(-q^{a+\frac{n+1}{2}}; q)},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{s=0}^{b-a-n-1} \frac{(q^{2a+n+1}, q^{n+\beta+1}, q^{n+\alpha+b+1}, q^{1-b+a+n}, q^{\frac{1}{2}(2a+n+3)}, -q^{\frac{1}{2}(2a+n+3)}; q)_s}{(q, q^{a+b+1}, q^{2a-\beta+1}, q^{1-b-\alpha+a}, q^{\frac{1}{2}(2a+n+1)}, -q^{\frac{1}{2}(2a+n+1)}; q)_s [2a+n+1]_q^{-1}} q^{-s(1+2n+\beta+\alpha)} \\ &= [2a+n+1]_q {}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} q^{2a+n+1}, q^{n+\beta+1}, q^{n+\alpha+b+1}, q^{1-b+a+n}, q^{a+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}, -q^{a+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}} \\ q^{a+b+1}, q^{2a-\beta+1}, q^{1-b-\alpha+a}, q^{a+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}, -q^{a+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \end{matrix} \middle| q, q^{-1-2n-\beta-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Pero la fórmula anterior se corresponde con una serie hipergeométrica básica *muy bien ponderada* ${}_6\varphi_5$ así usando la fórmula de sumación [65, p. 238, ec.(II.21)]

$${}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} a, qa^{1/2}, -qa^{1/2}, b, c, q^{-k} \\ a^{1/2}, -a^{1/2}, aq/b, aq/c, aq^{k+1} \end{matrix} \middle| q, \frac{aq^{k+1}}{bc} \right) = \frac{(aq, aq/bc; q)_k}{(aq/b, aq/c; q)_k},$$

con $k = b - a - n - 1$, $a = q^{2a+n+1}$, $b = q^{n+\beta+1}$, $c = q^{n+a+\alpha+b+1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} S_n &= [2a+n+1]_q \frac{(q^{2a+n+2}, q^{-n+a-b-\alpha-\beta}; q)_{b-a-n-1}}{(q^{2a-\beta+1}, q^{a-b-\alpha+1}; q)_{b-a-n-1}} \\ &= [2a+n+1]_q \frac{(2a+n+2|q)_{b-a-n-1}(-n+a-b-\alpha-\beta|q)_{b-a-n-1}}{(2a-\beta+1|q)_{b-a-n-1}(a-b-\alpha+1|q)_{b-a-n-1}}. \end{aligned}$$

Por último, usando (5.5) y (2.16) se tiene la expresión

$$S_n = [2a+n+1]_q \frac{\tilde{\Gamma}(a+b+1)\tilde{\Gamma}(2a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(\alpha+n+1)}{\tilde{\Gamma}(n+2a+2)\tilde{\Gamma}(b+a-\beta-n)\tilde{\Gamma}(\alpha+\beta+2n+2)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha)},$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)\tilde{\Gamma}_q(2a+n+1)\tilde{\Gamma}_q(n+\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(a+b+n+\alpha+1)\tilde{\Gamma}_q(b+\alpha-a)}{[n]_q!\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}_q(a+b+1)\tilde{\Gamma}_q(2a-\beta+1)\tilde{\Gamma}_q(b-a-n)} S_n \\ &= \frac{\tilde{\Gamma}(\alpha+n+1)\tilde{\Gamma}(\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(a+b+\alpha+n+1)}{[\alpha+\beta+2n+1]_q\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a-n)\tilde{\Gamma}(a+b-\beta-n)}. \end{aligned}$$

5.1.3. La representación hipergeométrica

A partir de las fórmulas (2.37) y (2.39) se siguen las siguientes dos representaciones hipergeométricas equivalentes:

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{q^{-\frac{n}{2}(2a+\alpha+\beta+n+1)}(q^{a-b+1}; q)_n(q^{\beta+1}; q)_n(q^{a+b+\alpha+1}; q)_n}{\kappa_q^{2n}(q; q)_n} \\ &\quad \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{\alpha+\beta+n+1}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{\beta+1}, q^{a+b+\alpha+1} \end{matrix} \middle| q, q \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

o

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(\beta+1|q)_n(a+b+\alpha+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &\quad \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, \beta+1, a+b+\alpha+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando la formula de transformación de Sears [65, Ec. (III.15)] se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{q^{-\frac{n}{2}(-2b+\alpha+\beta+n+1)}(q^{a-b+1}; q)_n(q^{\alpha+1}; q)_n(q^{\beta-a-b+1}; q)_n}{\kappa_q^{2n}(q; q)_n} \\ &\quad \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{\alpha+\beta+n+1}, q^{-b-s}, q^{-b+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{\alpha+1}, q^{-a-b+\beta+1} \end{matrix} \middle| q, q \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

y

$$u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q = \frac{(a-b+1|q)_n(\alpha+1|q)_n(-a-b+\beta+1|q)_n}{[n]_q!} \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1, -b-s, -b+s+1 \\ a-b+1, \alpha+1, -a-b+\beta+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \quad (5.9)$$

En consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(\beta+1|q)_n(a+b+\alpha+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &= \frac{(q^{a-b+1}; q)_n(q^{\beta+1}; q)_n(q^{a+b+\alpha+1}; q)_n}{q^{\frac{n}{2}(2a+\alpha+\beta+n+1)} \kappa_q^{2n}(q; q)_n}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(b-1), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(\alpha+1|q)_n(-a-b+\beta+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &= \frac{(q^{a-b+1}; q)_n(q^{\alpha+1}; q)_n(q^{\beta-a-b+1}; q)_n}{q^{\frac{n}{2}(-2b+\alpha+\beta+n+1)} \kappa_q^{2n}(q; q)_n}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La fórmula (2.35) da lugar a la siguiente fórmula explícita

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)}{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)} \\ &\times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k [2s+2k-n+1]_q \tilde{\Gamma}(s+k+a+1) \tilde{\Gamma}(2s+k-n+1)}{\tilde{\Gamma}(k+1) \tilde{\Gamma}(n-k+1) \tilde{\Gamma}(2s+k+2) \tilde{\Gamma}(s-n+k-a+1)} \\ &\times \frac{\tilde{\Gamma}(s+k-a+\beta+1) \tilde{\Gamma}(s+k+\alpha+b+1) \tilde{\Gamma}(b+\alpha-s+n-k)}{\tilde{\Gamma}(s-n+k+b+1) \tilde{\Gamma}(s-n+k+a-\beta+1) \tilde{\Gamma}(b-s-k)}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A partir de la representación hipergeométrica se obtiene la siguiente propiedad de simetría

$$u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q = u_n^{-b-a+\beta, b+a+\alpha}(x(s), a, b)_q.$$

Por último, nótese que a partir de (5.6) (ó (5.8)) se sigue que $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ es un polinomio de grado n en $x(s) = [s]_q[s+1]_q$. De hecho,

$$(q^{a-s}; q)_k (q^{a+s+1}; q)_k = (-1)^k q^{k(a+\frac{k+1}{2})} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{x(s) - c_3}{c_1} - q^{-\frac{1}{2}}(q^{a+l+\frac{1}{2}} + q^{-a-l-\frac{1}{2}}) \right),$$

donde c_1 y c_3 vienen dadas en (5.3).

5.1.4. La RRTT y las fórmulas de diferenciación

Para obtener los coeficientes de la RRTT usando (2.47) y (2.48), se obtiene que

$$k_n = \frac{\tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+2n+1)}{[n]_q! \tilde{\Gamma}_q(\alpha+\beta+n+1)}, \quad \alpha_n = \frac{[n+1]_q[\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q}.$$

Para calcular γ_n se usa (2.10)

$$\gamma_n = \frac{[a+b+\alpha+n]_q[a+b-\beta-n]_q[\alpha+n]_q[\beta+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[b-a-n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q},$$

y

$$\begin{aligned} \beta_n &= x(a) - \alpha_n \frac{u_{n+1}^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q}{u_n^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q} - \gamma_n \frac{u_{n-1}^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q}{u_n^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q} \\ &= [a]_q[a+1]_q - \frac{[\alpha+\beta+n+1]_q[a-b+n+1]_q[\beta+n+1]_q[a+b+\alpha+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q} \\ &\quad + \frac{[\alpha+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[a+b-\beta-n]_q[n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q}. \end{aligned}$$

Las fórmulas de diferenciación (2.49) y (2.50) dan lugar a

$$\frac{\Delta u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{\Delta x(s)} = [\alpha+\beta+n+1]_q u_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x(s+\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} -[n]_q[2s+1]_q u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \sigma(-s-1) u_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x(s+\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q \\ &\quad - \sigma(s) u_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x(s-\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q, \end{aligned} \quad (5.14)$$

respectivamente. Por último, las fórmulas (2.49) y (2.50) dan lugar a las *fórmulas de diferenciación*

$$\begin{aligned} \sigma(s) \frac{\nabla u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{[2s]_q} &= -\frac{[\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+2]_q} \left[\tau_n(s) u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right. \\ &\quad \left. + [n+1]_q u_{n+1}^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma(-s-1) \frac{\Delta u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{[2s+2]_q} &= -\frac{[\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+2]_q} \left[[n+1]_q u_{n+1}^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right. \\ &\quad \left. + (\tau_n(s) + [n]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q[2s+1]_q) u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right], \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde τ_n viene dado en la tabla 5.4.

5.1.5. La dualidad de los q -polinomios de Racah

En esta sección se discutirá la dualidad de los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$. Se seguirá [115, p. 38-39].

Nota 5.1.2. Nótese que un estudio más detallado del problema de dualidad ha sido realizado en [26].

Nótese que la relación de ortogonalidad

$$\sum_{s=a}^{b-1} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q u_m^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \rho(s) \nabla x_1(s) = d_n^2 \delta_{n,m}, \quad \Delta s = 1. \quad (5.17)$$

Tabla 5.1: Datos principales de los q -polinomios de Racah $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

$P_n(s)$	$u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad x(s) = [s]_q[s+1]_q$
(a, b)	$[a, b-1]$
$\rho(s)$	$\frac{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)}$ $-\frac{1}{2} < a \leq b-1, \alpha > -1, -1 < \beta < 2a+1$
$\sigma(s)$	$[s-a]_q[s+b]_q[s+a-\beta]_q[b+\alpha-s]_q$
$\sigma(-s-1)$	$[s+a+1]_q[b-s-1]_q[s-a+\beta+1]_q[b+\alpha+s+1]_q$
$\tau(s)$	$[\alpha+1]_q[a]_q[a-\beta]_q + [\beta+1]_q[b]_q[b+\alpha]_q - [\alpha+1]_q[\beta+1]_q - [\alpha+\beta+2]_q x(s)$
$\tau_n(s)$	$-[\alpha+\beta+2n+2]_q x(s + \frac{n}{2}) + [a + \frac{n}{2} + 1]_q [b - \frac{n}{2} - 1]_q$ $\times [\beta + \frac{n}{2} + 1 - a]_q [b + \alpha + \frac{n}{2} + 1]_q - [a + \frac{n}{2}]_q [b - \frac{n}{2}]_q [\beta + \frac{n}{2} - a]_q [b + \alpha + \frac{n}{2}]_q$
λ_n	$[n]_q[\alpha+\beta+n+1]_q$
B_n	$\frac{(-1)^n}{[n]_q!}$
d_n^2	$\frac{\tilde{\Gamma}(\alpha+n+1)\tilde{\Gamma}(\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(a+b+\alpha+n+1)}{[\alpha+\beta+2n+1]_q\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a-n)\tilde{\Gamma}(a+b-\beta-n)}$
$\rho_n(s)$	$\frac{\tilde{\Gamma}(s+n+a+1)\tilde{\Gamma}(s+n-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(s+n+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s-n)}$
a_n	$\frac{\tilde{\Gamma}[\alpha+\beta+2n+1]_q}{[n]_q!\tilde{\Gamma}[\alpha+\beta+n+1]_q}$
α_n	$\frac{[n+1]_q[\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q}$
β_n	$[a]_q[a+1]_q - \frac{[\alpha+\beta+n+1]_q[a-b+n+1]_q[\beta+n+1]_q[a+b+\alpha+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q}$ $+ \frac{[\alpha+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[a+b-\beta-n]_q[n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q}$
γ_n	$\frac{[a+b+\alpha+n]_q[a+b-\beta-n]_q[\alpha+n]_q[\beta+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[b-a-n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q}$

para los q -polinomios de Racah puede escribirse en la forma

$$\sum_{s=0}^{N-1} C_{sn} C_{sm} = \delta_{n,m}, \quad C_{sn} = \frac{u_n^{\alpha,\beta}(x(s+a), a, b)_q \sqrt{\rho(s+a) \nabla x_1(s+a)}}{d_n}, \quad N = b - a - 1,$$

donde ρ y d_n son las función peso y la norma de los q -polinomios de Racah, respectivamente. La relación anterior puede entenderse como la ortogonalidad de la matriz $C = ||C_{kn}||_{k,n=0}^{N-1}$ respecto a sus filas. Si se usa la ortogonalidad de C respecto a sus columnas, se obtiene que

$$\sum_{n=0}^{N-1} C_{sn} C_{s'n} = \delta_{s,s'}, \quad N = b - a - 1,$$

que da lugar a la relación de ortogonalidad dual para los q -polinomios de Racah

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q u_n^{\alpha,\beta}(x(s'), a, b)_q \frac{1}{d_n^2} = \frac{1}{\rho(s)\Delta x(s-1/2)} \delta_{s,s'}. \quad (5.18)$$

El siguiente paso consiste en identificar los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$. Antes de comenzar se advierte que a partir de la representación (5.6) y la identidad

$$(q^{-n}; q)_k (q^{\alpha+\beta+n+1}; q)_k = \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 + q^{\alpha+\beta+2l+1} - q^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}+l} \left(\kappa_q^2 x(t) + q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} \right) \right),$$

donde

$$x(t) = [t]_q [t+1]_q = \left[n + \frac{\alpha+\beta}{2} \right]_q \left[n + \frac{\alpha+\beta}{2} + 1 \right]_q,$$

se sigue que $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ también constituye un polinomio de grado $s-a$ (para $s = a, a+1, \dots, b-a-1$) sobre $x(t)$ con $t = n + \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Así, se definen los polinomios – compárese con la definición de los q -polinomios de Racah (5.7) –

$$\begin{aligned} u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q &= \frac{(-1)^k \tilde{\Gamma}(b'-a') \tilde{\Gamma}(\beta'+k+1) \tilde{\Gamma}(b'+a'+\alpha'+k+1)}{[k]! \tilde{\Gamma}(b'-a'-k) \tilde{\Gamma}(\beta'+1) \tilde{\Gamma}(b'+a'+\alpha'+1)} \\ &\times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -k, \alpha'+\beta'+k+1, a'-t, a'+t+1 \\ a'-b'+1, \beta'+1, a'+b'+\alpha'+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde

$$k = s-a, \quad t = n + \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad a' = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b' = b-a + \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \alpha' = 2a-\beta, \quad \beta' = \beta. \quad (5.20)$$

Obviamente son polinomios de grado $k = s-a$ sobre la red $x(t)$ que satisfacen la propiedad de ortogonalidad

$$\sum_{t=a'}^{b'-1} u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q u_m^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q \rho'(t) \nabla x_1(t) = (d'_k)^2 \delta_{k,m}, \quad (5.21)$$

donde ρ' y $(d'_n)^2$ son la función ρ y la norma d_n^2 de la tabla 5.1.4 reemplazando $a, b, \alpha, \beta, s, n$ por $a', b', \alpha', \beta', t, k$.

Además, con esta elección (5.20) de los parámetros la representación hipergeométrica ${}_4\varphi_3$ de $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$, en (5.19) coincide con la función hipergeométrica ${}_4\varphi_3$ en (5.7). Luego se establece así la siguiente relación entre los polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$ y $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$:

$$u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q = \mathcal{A}(\alpha, \beta, a, b, n, s) u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad (5.22)$$

donde

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta, a, b, n, s) = \frac{(-1)^{s-a+n} \tilde{\Gamma}(b-a-n) \tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1) \tilde{\Gamma}(b+\alpha+s+1) \tilde{\Gamma}(n+1)}{\tilde{\Gamma}(b-s) \tilde{\Gamma}(n+\beta+1) \tilde{\Gamma}(b+a+\alpha+n+1) \tilde{\Gamma}(s-a+1)}.$$

Si se sustituye ahora (5.22) en (5.21) y se realiza el cambio (5.20), entonces (5.21) se transforma en la relación (5.18), es decir, el conjunto de polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$ definido por (5.19) (o

(5.22)) es el conjunto dual asociado a los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$.

Para concluir este estudio, se mostrará que la RRTT (2.9) de los polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$ es la ecuación en diferencias (2.25) que los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ satisfacen mientras que la ecuación en diferencias (2.25) que satisfacen $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$ se transforma en la RRTT (2.9) de los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ y viceversa.

Sea $\varsigma(t)$ la función σ del polinomio u_k . Entonces

$$\varsigma(t) = [t - a']_q [t + b']_q [t + a' - \beta']_q [b' + \alpha' - t]_q = [n]_q [n + b - a + \alpha + \beta]_q [n + \alpha]_q [b + a - n - \beta]_q,$$

y por tanto,

$$\varsigma(-t - 1) = [\alpha + \beta + n + 1]_q [b + a + \alpha + n + 1]_q [b - a - n - 1]_q [n + \beta + 1]_q,$$

$$\lambda_k = [k]_q [\alpha' + \beta' + k + 1]_q = [s - a]_q [s + a + 1]_q.$$

Los coeficientes α'_k , β'_k y γ'_k se obtienen a partir de los coeficientes de la RRTT para los polinomios u_k obteniéndose

$$\alpha'_k = \frac{[k + 1]_q [\alpha' + \beta' + k + 1]_q}{[\alpha' + \beta' + 2k + 1]_q [\alpha' + \beta' + 2k + 2]_q} = \frac{[s - a + 1]_q [s + a + 1]_q}{[2s + 1]_q [2s + 2]_q},$$

$$\gamma'_k = \frac{[b + \alpha + s]_q [b + \alpha - s]_q [s + a - \beta]_q [s - a + \beta]_q [b + s]_q [b - s]_q}{[2s + 1]_q [2s]_q},$$

y

$$\beta'_k = [n + \frac{\alpha + \beta}{2}]_q [n + \frac{\alpha + \beta}{2} + 1]_q + \frac{\sigma(-s - 1)}{[2s + 1]_q [2s + 2]_q} + \frac{\sigma(s)}{[2s + 1]_q [2s]_q}.$$

Además

$$\Delta x(t) = [2t + 2]_q = [2n + \alpha + \beta + 2]_q,$$

$$x(s) = [s]_q [s + 1]_q = [k + a]_q [k + a + 1]_q.$$

Se verá que la ecuación en diferencias lineal de segundo orden de los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, es la RRTT de los polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$. Para ello, se sustituye la relación (5.22) en la ecuación en diferencias (2.25) de los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ y se usa que

$$u_n^{\alpha,\beta}(x(s \pm 1), a, b)_q = u_{k \pm 1}^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q. \quad (5.23)$$

Después de algunas simplificaciones, y usando (5.23) se obtiene que

$$\alpha'_k u_{k+1}^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q + \left(\beta'_k - [n]_q [\alpha + \beta + n + 1]_q - [\frac{\alpha + \beta}{2}]_q [\frac{\alpha + \beta}{2} + 1]_q \right) u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$$

$$+ \gamma'_k u_{k-1}^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q = 0,$$

pero

$$[n]_q [\alpha + \beta + n + 1]_q + [\frac{\alpha + \beta}{2}]_q [\frac{\alpha + \beta}{2} + 1]_q = [n + \frac{\alpha + \beta}{2}]_q [n + \frac{\alpha + \beta}{2} + 1]_q = x(t),$$

luego se obtiene la RRTT para los polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$.

Si ahora se sustituye (5.22) en la RRTT (2.9) para los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, y se usa que

$$u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q = u_k^{\alpha',\beta'}(x(t \pm 1), a', b')_q,$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{\varsigma(-t-1)}{\Delta x(t)\nabla x_1(t)}u_k^{\alpha',\beta'}(x(t+1),a',b')_q + \frac{\varsigma(t)}{\nabla x(t)\nabla x_1(t)}u_k^{\alpha',\beta'}(x(t-1),a',b')_q - \left[\frac{\varsigma(-t-1)}{\Delta x(t)\nabla x_1(t)} + \frac{\varsigma(t)}{\nabla x(t)\nabla x_1(t)} + [a]_q[a+1]_q - [k+a]_q[k+a+1]_q \right] u_k^{\alpha',\beta'}(x(t),a',b')_q = 0,$$

que coincide con la ecuación en diferencias (2.25) de los polinomios $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t),a',b')_q$ dado que $[a]_q[a+1]_q - [k+a]_q[k+a+1]_q = -[k]_q[k+2a+1]_q = -[k]_q[k+\alpha'+\beta'+1]_q = -\lambda_k$.

5.2. Los q -polinomios de Racah $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q$

Existe otra posibilidad para definir los q -polinomios de Racah la cual fue sugerida en [99, 115]. Sea ahora

$$\sigma(s) = [s-a]_q[s+b]_q[s-a+\beta]_q[b+\alpha+s]_q,$$

i.e., $A=1$, $s_1=a$, $s_2=-b$, $s_3=a-\beta$, $s_4=-b-\alpha$. Con esta elección se obtiene una nueva familia $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q$ la cual es ortogonal respecto a la función peso

$$\rho(s) = \frac{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)}{\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)}.$$

Todas las propiedades básicas pueden obtenerse exactamente de la misma forma que en el caso anterior. Además, todas sus propiedades pueden obtenerse igualmente a partir de las correspondientes propiedades de los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q$ simplemente cambiando $\alpha \rightarrow -2b-\alpha$, $\beta \rightarrow 2a-\beta$ y usando las propiedades de las funciones $\tilde{\Gamma}(s)$, $\Gamma_q(s)$, $(a|q)_n$ y $(a;q)_n$. Los datos principales de estos polinomios se resumen en la tabla 5.2.

5.2.1. La representación hipergeométrica

Para los polinomios $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q$ se tiene la siguiente representación hipergeométrica

$$\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q = \frac{q^{-\frac{n}{2}(4a-2b-\alpha-\beta+n+1)}(q^{a-b+1};q)_n(q^{2a-\beta+1};q)_n(q^{a-b-\alpha+1};q)_n}{\kappa_q^{2n}(q;q)_n} \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2a-2b-\alpha-\beta+n+1}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{2a-\beta+1}, q^{a-b-\alpha+1} \end{matrix} \middle| q, q \right), \quad (5.24)$$

o, en términos de las series q -hipergeométricas (2.17),

$$\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q = \frac{(a-b+1|q)_n(2a-\beta+1|q)_n(a-b-\alpha+1|q)_n}{[n]_q!} \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, 2a-2b-\alpha-\beta+n+1, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, 2a-\beta+1, a-b-\alpha+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \quad (5.25)$$

Usando la fórmula de transformación de Sears [65, Ec. (III.15)] se obtienen otras fórmulas de representación equivalentes

$$\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s),a,b)_q = \frac{q^{-\frac{n}{2}(2a-4b-\alpha-\beta+n+1)}(q^{a-b+1};q)_n(q^{-2b-\alpha+1};q)_n(q^{-\beta+a-b+1};q)_n}{\kappa_q^{2n}(q;q)_n} \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2a-2b-\alpha-\beta+n+1}, q^{-b-s}, q^{-b+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{-2b-\alpha+1}, q^{a-b-\beta+1} \end{matrix} \middle| q, q \right), \quad (5.26)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(-2b-\alpha+1|q)_n(a-b-\beta+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &\quad \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, 2a-2b-\alpha-\beta+n+1, -b-s, -b+s+1 \\ a-b+1, -2b-\alpha+1, a-b-\beta+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(a), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(2a-\beta+1|q)_n(a-b-\alpha+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &= \frac{(q^{a-b+1}; q)_n(q^{2a-\beta+1}; q)_n(q^{a-b-\alpha+1}; q)_n}{q^{\frac{n}{2}(4a-2b-\alpha-\beta+n+1)} \kappa_q^{2n}(q; q)_n}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(b-1), a, b)_q &= \frac{(a-b+1|q)_n(-2b-\alpha+1|q)_n(a-b-\beta+1|q)_n}{[n]_q!} \\ &= \frac{(q^{a-b+1}; q)_n(q^{-2b-\alpha+1}; q)_n(q^{-\beta+a-b+1}; q)_n}{q^{\frac{n}{2}(2a-4b-\alpha-\beta+n+1)} \kappa_q^{2n}(q; q)_n}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando (2.35) se obtiene una fórmula explícita

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \frac{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)}{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)} \\ &\quad \times \tilde{\Gamma}(b+\alpha-s) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+n}[2s+2k-n+1]_q \tilde{\Gamma}(s+k+a+1)\tilde{\Gamma}(2s+k-n+1)}{\tilde{\Gamma}(k+1)\tilde{\Gamma}(n-k+1)\tilde{\Gamma}(2s+k+2)\tilde{\Gamma}(s-n+k-a+1)\tilde{\Gamma}(b-s-k)} \\ &\quad \times \frac{\tilde{\Gamma}(s+k+a-\beta+1)}{\tilde{\Gamma}(s+k-n+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s-k)\tilde{\Gamma}(s-n+k+b+1)\tilde{\Gamma}(s-n+k-a+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A partir de la representación hipergeométrica se siguen la siguiente propiedad de simetría

$$\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q = \tilde{u}_n^{-b-a+\beta, b+a+\alpha}(x(s), a, b)_q.$$

5.2.2. Las fórmulas de diferenciación

Si se usan las fórmulas de diferenciación (5.6) (o (5.8)) se obtiene

$$\frac{\Delta \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{\Delta x(s)} = -[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q \tilde{u}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x(s+\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} [n]_q[2s+1]_q \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= \sigma(-s-1) \tilde{u}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x(s+\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q \\ &\quad - \sigma(s) \tilde{u}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x(s-\frac{1}{2}), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})_q, \end{aligned} \quad (5.32)$$

respectivamente. Además, las fórmulas (2.49) y (2.50) dan lugar a las siguientes dos fórmulas de diferenciación

$$\begin{aligned} \sigma(s) \frac{\nabla \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{[2s]_q} &= - \left[\tau_n(s) \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q - [n+1]_q \tilde{u}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right] \\ &\quad \times \frac{[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\sigma(-s-1) \frac{\Delta \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q}{[2s+2]_q} = - \left[(\tau_n(s) + [n]_q [2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q [2s+1]_q) \right. \\ \left. \times \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q - [n+1]_q \tilde{u}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \right] \frac{[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q}, \quad (5.34)$$

respectivamente, donde $\tau_n(s)$ viene dado en la tabla 5.2.

5.2.3. El conjunto dual de $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

Para obtener el conjunto dual de $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ se usa el mismo método que el empleado en la sección previa. Se comienza considerando la relación de ortogonalidad (5.17) para los polinomios $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ definida por (5.27), y se escribe la relación dual como

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s'), a, b)_q \frac{1}{d_n^2} = \frac{1}{\rho(s) \Delta x(s-1/2)} \delta_{s,s'}, \quad N = b-a, \quad (5.35)$$

donde ρ y d_n^2 para $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ viene dada en la tabla 5.2. Además, a partir de (5.27) se sigue que las funciones $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ son polinomios de grado $k = b-s-1$ sobre la red $x(t) = [t]_q [t+1]_q$ donde $t = b-a-n + \frac{\alpha+\beta}{2} - 1$ (la prueba es análoga a la presentada en la sección §5.1.5 y se omitirá). Para identificar el conjunto dual se define el conjunto de los polinomios

$$\tilde{u}_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q = \frac{(-1)^k \tilde{\Gamma}(b'-a') \tilde{\Gamma}(b'-a'+\beta') \tilde{\Gamma}(2b'+\alpha')}{[k]! \tilde{\Gamma}(b'-a'-k) \tilde{\Gamma}(b'-a'+\beta'-k) \tilde{\Gamma}(2b'+\alpha'-k)} \\ \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -k, 2a'-2b'-\alpha'-\beta'+k+1, -b'-t, -b'+t+1 \\ a'-b'+1, -2b'-\alpha'+1, a'-b'-\beta'+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right), \quad (5.36)$$

donde

$$k = b-s-1, \quad t = b-a-n + \frac{\alpha+\beta}{2} - 1, \quad a' = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b' = b-a + \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \alpha' = 2a-\beta, \quad \beta' = \beta. \quad (5.37)$$

Obviamente, estos satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\sum_{t=a'}^{b'-1} \tilde{u}_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q \tilde{u}_m^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q \rho'(t) \Delta x(t-1/2) = (d'_k)^2 \delta_{k,m}, \quad (5.38)$$

donde ahora $\rho'(t)$ y $(d'_n)^2$ son las funciones ρ y el cuadrado de la norma, d_n^2 , respectivamente, dados en la tabla 5.2 aplicando el cambio de parámetros (5.37)

$$a, b, \alpha, \beta, n, s \rightarrow a', b', \alpha', \beta', k, t.$$

Además, con la definición anterior (5.37) para los parámetros de $\tilde{u}_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$, la función hipergeométrica ${}_4\varphi_3$ en (5.36) coincide con la función hipergeométrica ${}_4\varphi_3$ en (5.27) y por tanto se tiene la siguiente relación entre los polinomios $\tilde{u}_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$ y $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$:

$$\tilde{u}_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q = \tilde{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, a, b, n, s) \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad (5.39)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{A}}(\alpha, \beta, a, b, n, s) = \frac{(-1)^{b-s-1-n} \tilde{\Gamma}(b-a-n) \tilde{\Gamma}(2b+\alpha-n) \tilde{\Gamma}(b-a+\beta-n) \tilde{\Gamma}(n+1)}{\tilde{\Gamma}(b-s) \tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1) \tilde{\Gamma}(s+b+\alpha+1) \tilde{\Gamma}(s-a+1)}.$$

Para probar que los polinomios $\tilde{u}_k^{\alpha', \beta'}(x(t), a', b')_q$ son los duales de $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$ es suficiente sustituir (5.39) en (5.38) y realizar el cambio (5.37) que transforma (5.38) en (5.18).

Se debe mencionar también que, como en el caso de los q -polinomios de Racah, la RRTT (2.9) de los polinomios $\tilde{u}_k^{\alpha', \beta'}(x(t), a', b')_q$ se transforma en la ecuación en diferencias (2.25) que satisfacen los polinomios $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$ mientras que la ecuación en diferencias (2.25) de los polinomios $\tilde{u}_k^{\alpha', \beta'}(x(t), a', b')_q$ da lugar a la RRTT (2.9) de $\tilde{u}_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q$ y viceversa.

5.3. Conexión con los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$

5.3.1. Los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$

Antes de hablar de dicha conexión se debe comentar brevemente su relación con la teoría de representación de grupos.

Definición 5.3.1. Sea V un espacio vectorial lineal sobre $\mathbb{C}$, y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal sobre dicho espacio. Se dirá que T es una representación de un grupo G sobre V si a cada elemento $g \in G$ le corresponde un elemento $T(g)$ de forma que¹

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad g = g_1 * g_2 \implies T(g) = T(g_1 * g_2) = T(g_1)T(g_2), \quad T(e) = I,$$

donde e representa el elemento neutro respecto $*$. Al espacio V se le denomina espacio de la representación de G .

En general, en V todo operador $T : V \rightarrow V$ se puede representar mediante matrices cuadradas², en este caso se dice que T es una representación matricial de G . Además, $T(g)$ es una representación irreducible (RI) si y sólo si no existe una matriz de cambio de base, A , tal que

$$\forall g \in G, \quad AT(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k \end{pmatrix},$$

donde $M_1, \dots, M_k$ denotan ciertas matrices cuadradas no nulas y 0 son matrices de ceros.

Con estas definiciones se pasará a mostrar la conexión con los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$ con los q -polinomios de Racah.

El álgebra cuántica $SU_q(2)$ está generada por los operadores J_0, J_+, J_- , que satisfacen las relaciones

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q, \quad (J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp}, \quad (J_0)^{\dagger} = J_0,$$

donde $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ denota el conmutador de A y B .

Por sencillez se usará el lenguaje de la Teoría cuántica del momento angular [129, 130, 131].

Por ejemplo, si se consideran dos momentos angulares, cuyas bases sean L_1 y L_2 , respectivamente, el momento resultante de la interacción de dichos momentos se encontrará en el espacio producto

¹Por $T(g)$ se denotará al operador asociado al elemento $g \in G$. Además, $T(g)$ es un operador que actúa sobre V .

²Dado que $SU_q(2)$ sólo tiene representaciones irreducibles finitas el estudio se restringirá al caso de matrices finitas.

tensorial de L_1 y L_2 , i.e. en $L_1 \otimes L_2$, el cual se puede descomponer como la suma directa de ciertas RI, i.e.

$$|j_1 j_2 : N m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2, m}^{j_1, j_2, N} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \quad j_1 \in L_1, j_2 \in L_2,$$

donde $C_{m_1, m_2, m}^{j_1, j_2, N}$ denota los coeficientes de Clebsh-Gordan (CGC) para el q -álgebra $SU_q(2)$. Es sabido (véase, por ejemplo, [130] y las referencias de ésta) que los coeficientes de Racah

$$U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}),$$

se emplean para la transición a partir del esquema del acoplador de tres momentos angulares j_1, j_2, j_3 , ya que si cada uno de estos momentos tienen asociado una RI, dígame L_1, L_2 y L_3 , entonces la interacción de tales momentos se produce en

$$L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 = (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 = L_1 \otimes (L_2 \otimes L_3).$$

De ahí que cualquier elemento de dicho espacio, se pueda expresar como

$$|j_1 j_2(j_{12}), j_3 : jm\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_{12}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} j_3 m_3 | jm \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle,$$

y

$$|j_1 j_2 j_3(j_{23}) : jm\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_{23}} \langle j_2 m_2 j_3 m_3 | j_{23} m_{23} \rangle \langle j_1 m_1 j_{23} m_{23} | jm \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle,$$

respectivamente, donde los símbolos $\langle j_a m_a j_b m_b | j_{ab} m_{ab} \rangle$ denotan los coeficientes de Clebsh-Gordan del álgebra cuántica $SU_q(2)$.

De hecho, se tiene que $U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23})$ representan a los coeficientes de cambio de base de $L \otimes (L_2 \otimes L_3)$ respecto $(L_1 \otimes L_2) \otimes L_3$, es decir,

$$|j_1 j_2(j_{12}), j_3 : jm\rangle = \sum_{j_{23}} U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}) |j_1 j_2 j_3(j_{23}) : jm\rangle.$$

Además, los coeficientes de Racah, U , definen una matriz unitaria, i.e., satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$\sum_{j_{23}} U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}) U_q(j_1 j_2 j j_3; j'_{12} j_{23}) = \delta_{j_{12}, j'_{12}}, \quad (5.40)$$

$$\sum_{j_{12}} U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}) U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j'_{23}) = \delta_{j_{23}, j'_{23}}. \quad (5.41)$$

Usualmente, en lugar de los coeficientes de Racah, se utilizan los $6j$ -símbolos definidos por

$$U_q(j_1 j_2 j j_3; j_{12} j_{23}) = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j} \sqrt{[2j_{12} + 1]_q [2j_{23} + 1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q.$$

Los $6j$ -símbolos satisfacen la siguiente propiedad de simetría

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ j_1 & j & j_{12} \end{matrix} \right\}_q. \quad (5.42)$$

Aquí, sin pérdida de generalidad, se ha supuesto que $j_1 > j_2$ y $j_3 > j_2$. Entonces para los momentos j_{23} y j_{12} se tienen las desigualdades

$$j_3 - j_2 \leq j_{23} \leq j_2 + j_3, \quad j_1 - j_2 \leq j_{12} \leq j_1 + j_2,$$

respectivamente. para evitar cualquier otra restricción sobre estos dos momentos (causado por las denominadas *desigualdades triangulares para los $6j$ -símbolos*) se asumirá que se verifican las siguientes restricciones

$$|j - j_3| \leq \min(j_{12}) = j_1 - j_2, \quad |j - j_1| \leq \min(j_{23}) = j_3 - j_2.$$

5.4. Los $6j$ -símbolos y los q -polinomios de Racah

Ya se está en disposición de establecer la conexión entre los $6j$ -símbolos y los q -polinomios de Racah. Fijese la variable s como $s = j_{23}$ con $a \leq s \leq b-1$, donde $a = j_3 - j_2$, $b = j_2 + j_3 + 1$, y tómese

$$(-1)^{j_1+j_{23}+j} \sqrt{[2j_{12}+1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = d_n^{-1} \sqrt{\rho(s)} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad (5.43)$$

donde ρ y d_n se corresponden con la función peso y la norma, respectivamente, de los q -polinomios de Racah sobre la red (5.1) $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, y $n = j_{12} - j_1 + j_2$, $\alpha = j_1 - j_2 - j_3 + j \geq 0$, $\beta = j_1 - j_2 + j_3 - j \geq 0$.³ Para verificar la relación anterior se usará la relación de recurrencia [131, p.699, ec. (5.17)]

$$\begin{aligned} & [2]_q [2j_{23} + 2]_q A_q^- \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} - 1 \end{matrix} \right\}_q \\ & - \left(([2j_{23}]_q [2j_1 + 2]_q - [2]_q [j - j_{23} + j_1 + 1]_q [j + j_{23} - j_1]_q) \right. \\ & \times ([2j_2]_q [2j_{23} + 2]_q - [2]_q [j_3 - j_2 + j_{23} + 1]_q [j_3 + j_2 - j_{23}]_q) \\ & \left. - ([2j_2]_q [2j_1 + 2]_q - [2]_q [j_{12} - j_2 + j_1 + 1]_q [j_{12} + j_2 - j_1]_q) [2j_{23} + 2]_q [2j_{23}]_q \right) \\ & \times [2j_{23} + 1]_q \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q + [2]_q [2j_{23}]_q A_q^+ \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} + 1 \end{matrix} \right\}_q = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde

$$\begin{aligned} A_q^- &= \sqrt{[j + j_{23} + j_1 + 1]_q [j + j_{23} - j_1]_q [j - j_{23} + j_1 + 1]_q [j_{23} - j + j_1]_q} \\ & \times \sqrt{[j_2 + j_3 + j_{23} + 1]_q [j_2 + j_3 - j_{23} + 1]_q [j_3 - j_2 + j_{23}]_q [j_2 - j_3 + j_{23}]_q}, \\ A_q^+ &= \sqrt{[j + j_{23} + j_1 + 2]_q [j + j_{23} - j_1 + 1]_q [j - j_{23} + j_1]_q [j_{23} - j + j_1 + 1]_q} \\ & \times \sqrt{[j_2 + j_3 + j_{23} + 2]_q [j_2 + j_3 - j_{23}]_q [j_3 - j_2 + j_{23} + 1]_q [j_2 - j_3 + j_{23} + 1]_q}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

³Nótese que esto es equivalente a la elección

$$\begin{aligned} j_1 &= (b - a - 1 + \alpha + \beta)/2, & j_2 &= (b - a - 1)/2, & j_3 &= (a + b - 1)/2, \\ j_{12} &= (2n + \alpha + \beta)/2, & j_{23} &= s, & j &= (a + b - 1 + \alpha - \beta)/2. \end{aligned}$$

Nótese que

$$A_q^- = \sqrt{\sigma(j_{23})\sigma(-j_{23})}, \quad A_q^+ = \sqrt{\sigma(j_{23}+1)\sigma(-j_{23}-1)},$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma(j_{23}) &= [j_{23} - j_3 + j_2]_q [j_{23} + j_2 + j_3 + 1]_q [j_{23} - j_1 + j]_q [j + j_1 - j_{23} + 1]_q, \\ \sigma(-j_{23} - 1) &= [j_{23} + j_3 - j_2 + 1]_q [j_2 + j_3 - j_{23}]_q [j_{23} + j_1 - j + 1]_q [j + j_1 + j_{23} + 2]_q. \end{aligned}$$

Sustituyendo (5.43) en (5.44) y simplificando la relación obtenida resulta

$$\begin{aligned} &[2s]_q \sigma(-s-1) u_n^{\alpha, \beta}(x(s+1), a, b)_q + [2s+2]_q \sigma[s] u_n^{\alpha, \beta}(x(s-1), a, b)_q \\ &+ \left(\lambda_n [2s]_q [2s+1]_q [2s+2]_q - [2s]_q \sigma(-s-1) - [2s+2]_q \sigma(s) \right) u_n^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q = 0, \end{aligned}$$

la cual es la ecuación en diferencias para los q -polinomios de Racah (2.25).

A partir de $u_0^{\alpha, \beta}(x(s), a, b)_q = 1$, (5.43) se tiene

$$(-1)^{j_1+j_{23}+j} \sqrt{[2j_1-2j_2+1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1-j_2 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = d_0^{-1} \sqrt{\rho(s)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1-j_2 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q := \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1-j_2 \\ j_3 & j & s \end{matrix} \right\}_q \\ &= (-1)^{j+j_1+s} \sqrt{\frac{[j_1+j+s+1]_q! [j_1+j-s]_q! [j_1-j+s]_q! [j_3-j_2+s]_q!}{[j-j_1+s]_q! [j_3+j_2-s]_q! [j_2-j_3+s]_q! [j_2+j_3+s+1]_q!}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[2j_1-2j_2]_q! [2j_2]_q! [j_2+j_3+j-j_1]_q!}{[2j_1+1]_q! [j_1+j_3-j_2-j]_q! [j_1-j_3-j_2+j]_q! [j_1+j_3-j_2+j+1]_q!}}. \end{aligned}$$

Además, sustituyendo $s = a$ y $s = b - 1$ en (5.43) y usando (5.10) y (5.11) se encuentra que

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_3-j_2 \end{matrix} \right\}_q = (-1)^{j_{12}+j_3+j} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[j_{12}+j_3-j]_q! [2j_2]_q! [j_{12}+j_3+j+1]_q! [2j_3-2j_2]_q! [j_2-j_1+j_{12}]_q!}{[j_1-j_2+j_3-j]_q! [j_1+j_2-j_{12}]_q! [j_1-j_2+j_3+j+1]_q!}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[j_1+j_2-j_3+j]_q! [j_1-j_2+j_{12}]_q! [j_3-j_{12}+j]_q!}{[2j_3+1]_q! [j_3-j_1-j_2+j]_q! [j_{12}-j_3+j]_q! [j_1+j_2+j_{12}+1]_q!}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

y

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_2+j_3 \end{matrix} \right\}_q = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[2j_2]_q! [j_{12}-j_3+j]_q! [j_2-j_1+j_3+j]_q! [2j_3]_q! [j_1+j_2+j_3-j]_q!}{[j_1+j_2-j_{12}]_q! [j_1-j_2-j_3+j]_q! [j_3-j_{12}+j]_q!}} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[j_2-j_1+j_{12}]_q! [j_1-j_2+j_{12}]_q! [j_1+j_2+j_3+j+1]_q!}{[2j_2+2j_3+1]_q! [j_{12}+j_3-j]_q! [j_1+j_2+j_{12}+1]_q! [j_{12}+j_3+j+1]_q!}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

La relación (5.43) permite obtener varias relaciones de recurrencia para los $6j$ -símbolos del álgebra cuántica $SU_q(2)$ usando las propiedades de los q -polinomios de Racah. Así la RRTT (2.9) resulta

$$\begin{aligned}
& [2j_{12}]_q \tilde{A}_q^+ \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12}+1 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q + [2j_{12}+2]_q \tilde{A}_q^- \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12}-1 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q \\
& - \left([2j_{12}]_q [2j_{12}+1]_q [2j_{12}+2]_q ([j_{23}]_q [j_{23}+1]_q - [j_3-j_2]_q [j_3-j_2+1]_q) + [2j_{12}]_q \right. \\
& \times [j_1-j_2+j_{12}+1]_q [j_{12}-j_1-j_2]_q [j_{12}+j_3-j+1]_q [j_{12}+j_3+j+2]_q - [2j_{12}+2]_q \\
& \times [j_{12}-j_3+j]_q [j_1+j_2+j_{12}+1]_q [j_3-j_{12}+j+1]_q [j_2-j_1+j_{12}]_q \left. \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = 0,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_q^- &= \sqrt{[j_2-j_1+j_{12}]_q [j_1-j_2+j_{12}]_q [j_{12}-j_3+j]_q [j_{12}+j_3-j]_q [j_1+j_2+j_{12}+1]_q} \\
&\times \sqrt{[j_{12}+j_3+j+1]_q [j_1+j_2-j_{12}+1]_q [j_3-j_{12}+j+1]_q} \\
\tilde{A}_q^+ &= \sqrt{[j_2-j_1+j_{12}+1]_q [j_1-j_2+j_{12}+1]_q [j_{12}-j_3+j+1]_q [j_{12}+j_3-j+1]_q} \\
&\times \sqrt{[j_1+j_2+j_{12}+2]_q [j_{12}+j_3+j+2]_q [j_1+j_2-j_{12}]_q [j_3-j_{12}+j]_q}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Las expresiones (5.13) y (5.14) dan lugar a

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sigma(j_{23}+1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23}+1 \end{matrix} \right\}_q + \sqrt{\sigma(-j_{23}-1)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q \\
& = [2j_{23}+2]_q \sqrt{[j_2-j_1+j_{12}]_q [j_1-j_2+j_{12}+1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1+\frac{1}{2} & j_2-\frac{1}{2} & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23}+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}_q,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

y

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\sigma(-j_{23}-1)} \left\{ \begin{matrix} j_1+\frac{1}{2} & j_2-\frac{1}{2} & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23}+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}_q + \sqrt{\sigma(j_{23})} \left\{ \begin{matrix} j_1+\frac{1}{2} & j_2-\frac{1}{2} & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23}-\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}_q \\
& = [2j_{23}+1]_q \sqrt{[j_{12}-j_1+j_2]_q [j_{12}+j_1-j_2+1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

respectivamente, mientras que de las fórmulas de diferenciación (5.15) – (5.16) se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}
& [2j_{12}+2]_q A_q^- \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23}-1 \end{matrix} \right\}_q + [2j_{23}]_q \tilde{A}_q^+ \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12}+1 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q + \\
& \left(\sigma(j_{23}) [2j_{12}+2]_q + [j_1-j_2+j_{12}+1]_q [2j_{23}]_q \Lambda(j_{12}, j_{23}, j_1, j_2) \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

y

$$\begin{aligned}
& [2j_{12} + 2]_q A_q^+ \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} + 1 \end{matrix} \right\}_q - [2j_{23} + 2]_q \tilde{A}_q^+ \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} + 1 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q \\
& + \left([2j_{12} + 2]_q \sigma(-j_{23} - 1) - [2j_{23} + 2]_q [j_1 - j_2 + j_{12} + 1]_q (\Lambda(j_{12}, j_{23}, j_1, j_2) \right. \\
& \left. + [j_{12} - j_1 + j_2]_q [2j_{12} + 2]_q [2j_{23} + 1]_q \right) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = 0,
\end{aligned} \tag{5.53}$$

respectivamente, donde $A_q^\pm$ viene dado por (5.45), $\tilde{A}_q^\pm$ por (5.49) y

$$\begin{aligned}
\Lambda(j_{12}, j_{23}, j_1, j_2) = & \sigma(-j_{12} + j_1 - j_2 - 1) - \sigma(-j_{12} + j_1 - j_2) \\
& - [2j_{12} + 2]_q \left[j_{23} + \frac{j_{12} - j_1 + j_2}{2} \right]_q \left[j_{23} + \frac{j_{12} - j_1 + j_2}{2} + 1 \right]_q.
\end{aligned}$$

Usando las representaciones hipergeométricas (5.7) y (5.9) se obtienen la representaciones para los $6j$ -símbolos en términos de las funciones q -hipergeométricas⁴ (2.14)

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = & (-1)^{j_{12}+j_{23}+j_2+j} \frac{[2j_2]_q! \sqrt{[j_{12} - j_1 + j_2]_q!}}{[j_1 - j_2 + j_3 - j]_q! [j_1 - j_2 + j_3 + j + 1]_q!} \\
& \times \sqrt{\frac{[j_1 + j + j_{23} + 1]_q! [j_1 + j - j_{23}]_q! [j_1 - j + j_{23}]_q! [j_3 - j_2 + j_{23}]_q!}{[j - j_1 + j_{23}]_q! [j_3 + j_2 - j_{23}]_q! [j_2 - j_3 + j_{23}]_q! [j_2 + j_3 + j_{23} + 1]_q!}} \\
& \times \sqrt{\frac{[j_{12} + j_1 - j_2]_q! [j + j_3 + j - j_{12}]_q! [j_{12} + j_3 - j]_q! [j_3 + j_{12} + j + 1]_q!}{[j_{12} - j_3 + j]_q! [j_1 + j_2 + j_{12} + 1]_q! [j_1 + j_2 - j_{12}]_q!}} \\
& \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} j_1 - j_2 - j_{12}, j_1 - j_2 + j_{12} + 1, j_3 - j_2 - j_{23}, j_{23} + j_3 - j_2 + 1 \\ -2j_2, j_1 - j_2 + j_3 - j + 1, j_1 - j_2 + j_3 + j + 2 \end{matrix} \middle| q, 1 \right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = & (-1)^{j_1+j_{23}+j} \frac{[2j_2]_q! [j_2 + j_3 - j_1 + j]_q!}{[j_1 - j_2 - j_3 + j]_q!} \\
& \times \sqrt{\frac{[j_1 + j + j_{23} + 1]_q! [j_1 + j - j_{23}]_q! [j_1 - j + j_{23}]_q! [j_3 - j_2 + j_{23}]_q!}{[j - j_1 + j_{23}]_q! [j_3 + j_2 - j_{23}]_q! [j_2 - j_3 + j_{23}]_q! [j_2 + j_3 + j_{23} + 1]_q!}} \\
& \times \sqrt{\frac{[j_{12} - j_1 + j_2]_q! [j_{12} + j_1 - j_2]_q! [j_{12} - j_3 + j]_q! [j_3 + j_{12} + j + 1]_q!^{-1}}{[j_1 + j_2 + j_{12} + 1]_q! [j_1 + j_2 - j_{12}]_q! [j_3 + j - j_{12}]_q! [j_{12} + j_3 - j]_q!}} \\
& \times {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} j_1 - j_2 - j_{12}, j_1 - j_2 + j_{12} + 1, -j_3 - j_2 + j_{23}, -j_{23} - j_3 - j_2 - 1 \\ -2j_2, j_1 - j_2 - j_3 + j + 1, j_1 - j_2 - j_3 - j \end{matrix} \middle| q, 1 \right).
\end{aligned}$$

Nótese que a partir de las representaciones anteriores los valores (5.46) y (5.47) se obtienen inmediatamente. Nótese además que las últimas fórmulas son una forma explícita alternativa para

⁴Para obtener la representación en términos de las series hipergeométricas básicas es suficiente con usar la relación (2.17).

calcular los $6j$ -símbolos. Una tercera fórmula explícita se sigue a partir de (5.12)

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = \sqrt{\frac{[j_{23} + j_2 - j_3]_q! [j_{23} + j_2 + j_3 + 1]_q! [j_{23} + j - j_1]_q! [j_2 + j_3 - j_{23}]_q!}{[j_{23} + j_3 - j_2]_q! [j_{23} + j_1 - j]_q! [j_{23} + j_1 + j + 1]_q! [j_1 + j - j_{23}]_q!}} \times \sqrt{\frac{[j_{12} - j_1 + j_2]_q! [j_1 - j_2 + j_{12}]_q! [j_1 + j_2 - j_{12}]_q! [j_3 - j_{12} + j]_q!}{[j_{12} - j_3 + j]_q! [j_{12} + j_3 - j]_q! [j_1 + j_2 + j_{12} + 1]_q! [j_{12} + j_3 + j]_q!}} \times \sum_{k=0}^{j_{12}-j_1+j_2} \frac{(-1)^{k+j_1+j_{23}+j} [2k + j_1 - j_2 - j_{12} + 2j_{23} + 1]_q! [k + j_{23} + j_3 - j_2]_q!}{[k]_q! [j_{12} - j_1 + j_2 - k]_q! [2j_3 + 1 + k]_q! [k + j_{23} + j_1 - j_{12} - j_3]_q!} \times \frac{[2j_{23} + k - j_{12} + j_1 - j_2]_q! [k + j_{23} + j_1 - j]_q! [k + j_{23} + j_1 + j + 1]_q! [j_1 + j - j_{23} - k]_q!}{[k + j_{23} + j_1 - j_{12} + j_3 + 1]_q! [k + j_{23} + j - j_2 - j_{12}]_q! [j_2 + j_3 - j_{23} + 1 - k]_q!}$$

Para concluir esta sección se debe puntualizar que las relaciones (5.40) y (5.41) dan lugar a las relaciones de ortogonalidad para los q -polinomios de Racah, $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, (5.7) y a sus *duales* $u_k^{\alpha',\beta'}(x(t), a', b')_q$, respectivamente, y también que la relación (5.22) entre los q -polinomios de Racah y sus duales se deduce de la relación de simetría (5.42).

5.5. Los $6j$ -símbolos y los q -polinomios alternativos de Racah $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

En esta sección se hará el mismo análisis comparativo pero con los q -polinomios alternativos de Racah, $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$. En primer lugar se elige, de nuevo, $s = j_{23}$, $a = j_3 - j_2$, $b = j_2 + j_3 + 1$. En este caso la conexión viene dada a través de la expresión

$$(-1)^{j_{12}+j_3+j} \sqrt{[2j_{12} + 1]_q} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q = \sqrt{\frac{\rho(s)}{d_n^2}} \tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad (5.54)$$

donde ρ y d_n son la función peso y la norma, respectivamente, de los q -polinomios alternativos de Racah, $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$, (véase la sección §5.2) sobre la red (5.1), y $n = j_1 + j_2 - j_{12}$, $\alpha = j_1 - j_2 - j_3 + j \geq 0$, $\beta = j_1 - j_2 + j_3 - j \geq 0$.

Usando (5.54), la ecuación en diferencias (2.25) para $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ se transforma en la RRTT (5.44) y la RRTT (2.9) se transforma en la ecuación en diferencias (5.48). Evaluando (5.54) en $s = j_{23} = j_3 - j_2$ y $s = j_{23} = j_2 + j_3 + 1$ y usando (5.28) y (5.29) se recuperan los valores (5.46) y (5.47), respectivamente. Si se sustituye ahora $n = 0$, i.e., $j_{12} = j_1 + j_2$ se obtiene el valor

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_3 & j & j_{23} \end{matrix} \right\}_q := \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_1 + j_2 \\ j_3 & j & s \end{matrix} \right\}_q = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j} \sqrt{\frac{[2j_1]_q! [2j_2]_q! [j_1 + j_2 + j_3 + j + 1]_q! [j_1 + j_2 - j_3 + j]_q!}{[2j_1 + 2j_2 + 1]_q! [-j_1 - j_2 + j_3 + j]_q! [j_2 + j_3 + s + 1]_q!}} \times \sqrt{\frac{[s - j_1 + j]_q! [s - j_2 + j_3]_q!}{[j_1 + j - s]_q! [j_1 - j + s]_q! [j_1 + j + s + 1]_q! [j_2 + j_3 - s]_q! [j_2 - j_3 + s]_q!}}.$$

Además, dado que este caso puede obtenerse del anterior realizando las sustituciones descritas previamente, se omitirán todas las expresiones análogas a las obtenidas antes. Los detalles pueden encontrarse en [27].

5.6. Conexión entre $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$ y $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

A continuación se obtendrá la fórmula que conecta ambas familias. De hecho, las ecuaciones (5.43) y (5.54) sugieren la siguiente relación entre ambas familias

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{b-a-1-n}^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q &= (-1)^{s-a-n} \frac{\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(\alpha+1+n)} \\ &\times \frac{\tilde{\Gamma}(b+\alpha+1+s)\tilde{\Gamma}(a+b-\beta-n)}{\tilde{\Gamma}(\beta+1+n)\tilde{\Gamma}(a+b+\alpha+1+n)} u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Para probarla es suficiente sustituir la fórmula anterior en la ecuación en diferencias (2.25) de los q -polinomios $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$. Tras algunos cálculos sencillos resultando dicha ecuación se transforma en la correspondiente ecuación en diferencias para los polinomios $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$.

Nótese que a partir de esta relación se sigue que

$$\begin{aligned} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} a-b+n+1, a-b-\alpha-\beta-n, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, 2a-\beta+1, a-b-\alpha+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right) &= \frac{(\beta+1|q)_{s-a}}{(2a-\beta+1|q)_{s-a}} \\ &\times \frac{(b+\alpha+a+1|q)_{s-a}}{(a-b-\alpha+1)_{s-a}} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1, a-s, a+s+1 \\ a-b+1, \beta+1, a+b+\alpha+1 \end{matrix} \middle| q, 1 \right). \end{aligned}$$

Esto da lugar a la siguiente identidad para la serie hipergeométrica básica ${}_4\varphi_3$, $n, N-n-1, k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{n-N+1}, q^{-n-N+1}A^{-1}B^{-1}, q^{-k}, q^{-k}D \\ q^{1-N}, q^{-2k}DB^{-1}, q^{1-N}A^{-1} \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ = \frac{q^{-kN}}{A^k B^k} \frac{(qB; q)_k (q^{N-2k}DA; q)_k}{(q^{-2k}DB^{-1}; q)_k, (q^{1-N}A^{-1}; q)_k} {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, ABq^n, q^{-k}, q^{-k}D \\ q^{1-N}, qB, q^{N-2k}DA \end{matrix} \middle| q, q \right). \end{aligned}$$

Tabla 5.2: Principales datos de los q -polinomios de Racah $\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

$P_n(s)$	$\tilde{u}_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q, \quad x(s) = [s]_q[s+1]_q$
(a, b)	$[a, b-1]$
$\rho(s)$	$\frac{\tilde{\Gamma}(s+a+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)}{\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s)}$ $-\frac{1}{2} < a \leq b-1, \alpha > -1, -1 < \beta < 2a+1$
$\sigma(s)$	$[s-a]_q[s+b]_q[s-a+\beta]_q[b+\alpha+s]_q$
$\sigma(-s-1)$	$[s+a+1]_q[b-s-1]_q[s+a-\beta+1]_q[b+\alpha-s-1]_q$
$\tau(s)$	$[2a-\beta+1]_q[b]_q[b+\alpha]_q - [2b+\alpha-1]_q[a]_q[a-\beta]_q - [2b+\alpha-1]_q[2a-\beta+1]_q$ $-[2b-2a+\alpha+\beta-2]_q x(s)$
$\tau_n(s)$	$-[2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q x(s+\frac{n}{2}) + [a+\frac{n}{2}+1]_q[b-\frac{n}{2}-1]_q[a+\frac{n}{2}+1-\beta]_q[b-\frac{n}{2}+\alpha-1]_q$ $-[a+\frac{n}{2}]_q[b-\frac{n}{2}]_q[a+\frac{n}{2}-\beta]_q[b-\frac{n}{2}+\alpha]_q$
λ_n	$[n]_q[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q$
B_n	$\frac{1}{[n]_q!}$
d_n^2	$\frac{\tilde{\Gamma}(2a+n-\beta+1)\tilde{\Gamma}(2b-2a+\alpha+\beta-n)[2b-2a-2n-1+\alpha+\beta]_q^{-1}}{\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}(b-a-n)\tilde{\Gamma}(b-a-n+\alpha)\tilde{\Gamma}(b-a+\beta-n)\tilde{\Gamma}(2b+\alpha-n)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha+\beta-n)}$
$\rho_n(s)$	$\frac{\tilde{\Gamma}(s+a+n+1)\tilde{\Gamma}(s+a+n-\beta+1)}{\tilde{\Gamma}(s+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s-n)\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s-n)}$
a_n	$\frac{(-1)^n \tilde{\Gamma}[2b-2a+\alpha+\beta-n]_q}{[n]_q! \tilde{\Gamma}[2b-2a+\alpha+\beta-2n]_q}$
α_n	$-\frac{[n+1]_q[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-1]_q[2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q}$
β_n	$[a]_q[a+1]_q + \frac{[2b-2a+\alpha+\beta-n-1]_q[a-b+n+1]_q[2a-\beta+n+1]_q[a-b-\alpha+n+1]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-1]_q[2b-2a+\alpha+\beta-2n-2]_q}$ $+ \frac{[2b+\alpha-n]_q[b-a+\alpha+\beta-n]_q[b-a+\beta-n]_q[n]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-1]_q[2b-2a+\alpha+\beta-2n]_q}$
γ_n	$-\frac{[2a-\beta+n]_q[b-a-n]_q[b-a-n+\alpha]_q[b-a-n+\beta]_q[2b+\alpha-n]_q[b-a+\alpha+\beta-n]_q}{[2b-2a+\alpha+\beta-2n-1]_q[2b-2a+\alpha+\beta-2n]_q}$

Los q -polinomios semiclásicos

6.1. Introducción

En este capítulo se considerarán algunos problemas relacionadas con los polinomios ortogonales semiclásicos.

En esta memoria se han definido los q -polinomios en base a la ecuación de Pearson (véase la Definición 3.3.1)

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\nabla x_1(s)\rho(s)$$

donde $\sigma(s) + \frac{1}{2}\tau(s)\nabla x_1(s)$ y τ son polinomios de grado a lo más 2 y 1, respectivamente. Teniendo en cuenta dicha definición, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Es posible encontrar SPO respecto a funcionales lineales $\mathbf{u}$ tales que satisfagan la ecuación distribucional

$$\frac{\Delta}{\nabla x_1(s)}[\phi\mathbf{u}] = \psi\mathbf{u},$$

donde $\phi(s) + \frac{1}{2}\psi(s)\nabla x_1(s)$ y ψ son polinomios de grados, $k \geq 0$, y $l \geq 1$, respectivamente?.

Nota 6.1.1. Dado que la red que se considerará, $x(s)$, en este capítulo es de tipo lineal, bastará con suponer que ϕ es un polinomio de grado k .

Los polinomios semiclásicos estándar¹ fueron introducidos por J. A. Shohat [124] quien consideró el funcional lineal² $\mathbf{u}$ definido mediante la integral

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\rho(x)dx,$$

donde los límites de integración son finitos o infinitos, y ρ satisface la ecuación de Pearson

$$\frac{d}{dx}[\tilde{\phi}(x)\rho(x)] = \tilde{\psi}(x)\rho(x),$$

¹ Esto es, las SPO respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ el cual satisface la ecuación distribucional $\frac{d}{dx}[\tilde{\phi}\mathbf{u}] = \tilde{\psi}\mathbf{u}$, donde $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ son polinomios de grado, $k \geq 0$, y $l \geq 1$, respectivamente.

² Al funcional respecto al cual una SP semiclásica es ortogonal se denominará *funcional semiclásico*.

donde $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ son polinomios de grados, $k \geq 0$, y $l \geq 1$, respectivamente.

En la última década P. Maroni [105, 106, 107, 108, 109] y algunos de sus colaboradores [81, 107, 110] han contestado parcialmente a la pregunta anterior encontrando diversos ejemplos de familias semiclásicas. De hecho, P. Maroni es quizá quien ha realizado el estudio más detallado de dichas familias.

Dos conceptos fundamentales relativos a las familias semiclásicas son las de *pares admisibles* y la de *clase de un funcional semiclásico*.

Definición 6.1.1. Sean ϕ y ψ dos polinomios de grado, $k \geq 0$, y $l \geq 1$, respectivamente. Se dirá que (ϕ, ψ) es un par q -admisble siempre que se verifique una de las siguientes condiciones:

1. $\text{grd}(\Delta^{(1)}\phi) \neq \text{grd}(\psi)$.
2. $\text{grd}(\Delta^{(1)}\phi) = \text{grd}(\psi)$, y

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{[l]!} [\Delta^{(1)}]^p \psi(0) := \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{[l]!} \overbrace{\Delta^{(1)} \cdots \Delta^{(1)}}^l \psi(0) \neq -n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

De hecho, si se toma $\eta = \max\{\text{grd } \phi - 2, \text{grd } \psi - 1\}$, se dice que el par (ϕ, ψ) es de orden η .

Teniendo en cuenta esta definición, dado un funcional semiclásico, $\mathbf{u}$, se puede definir el conjunto de todos los pares admisibles asociados a $\mathbf{u}$ como

$$\mathbb{P}_{\mathbf{u}}^2 := \{(\phi, \psi) \in \mathbb{P}^2 : \phi \text{ mónico y } \Delta[\phi\mathbf{u}] = \psi \nabla x_1(s)\mathbf{u}\}.$$

Se puede definir en $\mathbb{P}_{\mathbf{u}}^2$ el orden parcial, $\prec$, sobre $P_{\mathbf{u}}^2$ respecto al cual $P_{\mathbf{u}}^2$ tiene un único elemento minimal (ϕ_0, ψ_0) .

Definición 6.1.2. Dado un funcional semiclásico, $\mathbf{u}$, se define la clase del funcional $\mathbf{u}$ como

$$\sigma := \max\{\deg(\phi_0) - 2, \deg(\psi_0) - 1\} = \min_{(\phi, \psi) \in \mathbb{P}_{\mathbf{u}}^2} \max\{\deg(\phi) - 2, \deg(\psi) - 1\}.$$

Luego, σ es la menor de los ordenes asociados a los pares admisibles de $\mathbf{u}$. Pueden encontrarse todos los detalles relativos a estas definiciones en [80].

6.1.1. Los polinomios tipo Krall

En los últimos años han sido estudiados intensamente funcionales los cuales son perturbaciones de un funcional lineal $\mathbf{c}$ mediante la adición de masas de Dirac – los denominados polinomios ortogonales tipo Krall – (véase, por ejemplo, en [21, 22] y las referencias contenidas en estos), i.e. $\mathbf{u} = \mathbf{c} + A\delta(x - x_0)$, donde $A \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{C}$ y

$$\langle \delta(x - y), p(x) \rangle = p(y), \quad p \in \mathbb{C}[x].$$

De particular interés resultan ser aquellos casos en los que el funcional inicial es clásico estándar (Jacobi [21, 88], Laguerre [21, 84], Hermite [21], y Bessel [102]) o discreto (Hahn, Meixner, Kravchuk, y Charlier) [18, 19, 20, 46, 47, 67]. Un caso más general es el siguiente: $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \sum_{i=1}^M A_i \delta(x - a_i) - \sum_{j=1}^N B_j \delta'(x - b_j)$ el cual ha sido estudiado en [12] donde se ha puesto especial énfasis en que $\mathbf{c}$ sea un funcional lineal semiclásico.

En [24] se estudia en detalle el caso donde $\mathbf{c}$ es un funcional lineal discreto semiclásico o q -semiclásico.

En esta memoria se hará hincapié en el caso cuando c es un funcional lineal q -clásico y se construirán los polinomios tipo Krall asociados a las familias q -clásicas de la tabla de Hahn [23, 90]. Este caso no es muy conocido y sólo unos pocos artículos estudian ejemplos concretos: los polinomios de Stieltjes-Wigert [55], un caso particular de los polinomios pequeños de Jacobi [138], y los polinomios de Al-Salam & Carlitz I y discretos de Hermite I [24].

Así, el interés de esta contribución es la de continuar el trabajo comenzado en [24] y estudiar diversas familias de q -polinomios ortogonales tipo Krall. En particular, se obtendrán los límites de los q -polinomios tipo Krall en la tabla de Hahn. En este sentido se continuará el estudio comenzado en [21] concerniente a las relaciones límite entre las familias tipo Krall.

6.1.2. Las relaciones de estructura de las familias semiclásicas

Las sucesiones de polinomios ortogonales q -clásicos, o q -polinomios, (q -polinomios grandes de Jacobi, q -polinomios de Laguerre, de Al-Salam & Carlitz I, de Charlier, etc.) se caracterizan por la propiedad que la sucesión de sus q -diferencias (mónicas) son, de nuevo, ortogonales (propiedad de Hahn, véase [70]). De hecho, el operador q -diferencia es un caso particular del operador de Hahn el cual se define como

$$L_{q,\omega}(f)(x) = \frac{f(qx + \omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}, \quad \omega \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{C}, |q| \neq 1.$$

En lo que sigue, se trabajará con polinomios q -semiclásicos y q -clásicos de la tabla de Hahn, por tanto se considerará la red q -lineal $x(s) = q^s$.

Existen varias formas de abordar los polinomios ortogonales q -semiclásicos. Por ejemplo, la ecuación funcional (la llamada ecuación de Pearson) que satisface el funcional de momentos permite un estudio eficiente de algunas características de los q -polinomios [23, 80, 81, 113]. Sin embargo, las sucesiones de q -polinomios ortogonales, $\{C_n\}_{n \geq 0}$, pueden también caracterizarse teniendo en cuenta su ortogonalidad así como las siguientes ecuaciones en diferencia, denominadas relaciones de estructura.

- *Primera relación de estructura* [2], [87], [115]

$$\Phi(s)C_n^{[1]}(s) = \sum_{\nu=n}^{n+t} \lambda_{n,\nu} C_\nu(s), \quad n \geq 0, \quad \lambda_{n,n} \neq 0, \quad n \geq 0, \quad (6.1)$$

donde Φ es un polinomio con $\text{grd } \Phi = t \leq 2$ y $C_n^{[1]}(s) := [n+1]^{-1} \Delta^{(1)} C_{n+1}(s)$, donde,

$$[n] := \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad n \geq 0. \quad (6.2)$$

- *Segunda relación de estructura* [112, 113]

$$C_n(s) = \sum_{\nu=n-t}^n \theta_{n,\nu} C_\nu^{[1]}(s), \quad n \geq t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad \theta_{n,n} = 1, \quad n \geq t. \quad (6.3)$$

La generalización de estas familias da lugar a los q -polinomios semiclásicos los cuales fueron introducidos por J. C. Medem [112]

Para las sucesiones de q -polinomios, los cuales son q -semiclásicos de clase cero, las relaciones de

estructura (6.1) y (6.3) se convierten en

$$\begin{aligned}\phi(s)L_{q,\omega}P_n(s) &= \phi(s)\frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \tilde{\beta}_n P_n(s) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(s), \quad \tilde{\gamma}_n \neq 0, \\ \sigma(s)L_{1/q,\omega/q}P_n(s) &= \phi(s)\frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} = \hat{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \hat{\beta}_n P_n(s) + \hat{\gamma}_n P_{n-1}(s), \quad \hat{\gamma}_n \neq 0, \\ P_n(s) &= P_n^{[1]}(s) + \delta_n P_{n-1}^{[1]}(s) + \epsilon_n P_{n-2}^{[1]}(s), \quad P_n^{[1]}(s) := [n+1]^{-1} \Delta^{(1)} P_{n+1}(s).\end{aligned}$$

6.2. Relaciones límite entre los q -polinomios tipo Krall

En este apartado se considerará una extensión natural de varios resultados relativos a los polinomios tipo Krall introduciendo una modificación de un funcional q -clásico lineal, $\mathbf{c}$, mediante la adición de una o dos masas puntuales, esto es,

$$\mathbf{u} := \mathbf{c} + A\delta(x - x_0) + B\delta(x - x_1), \quad x_0, x_1 \in \mathbb{C}, \quad A, B \in \mathbb{C},$$

los cuales se denominan q -polinomios tipo Krall. Para éstos, se obtendrán tanto sus expresiones explícitas, dando su representación en términos de las series hipergeométricas básicas, como las relaciones entre las distintas familias de q -polinomios de la Tabla de q -Hahn.

6.2.1. Preliminares

En esta sección se considerarán algunas fórmulas relativas a los q -polinomios, P_n , de la tabla de Hahn, los cuales son ortogonales respecto a un funcional q -clásico, $\mathbf{c}_q$ [113], i.e.,

$$\langle \mathbf{c}_q, P_n P_m \rangle = d_n^2 \delta_{n,m}, \quad d_n^2 \neq 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Estos funcionales usualmente son de la forma (véase sección 6.2.2 para más detalles)

$$\langle \mathbf{c}_q, P \rangle = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} P(s) \rho(s) \nabla x_1(s), & q\text{-polinomios pequeños de Jacobi, Meixner, Wall, Charlier,} \\ \int_{s_0}^{s_1} P(x) \rho(x) d_q x, & q\text{-polinomios pequeños de Jacobi, de Laguerre,} \end{cases} \quad (6.5)$$

etc., donde

$$\int_{s_0}^{s_1} f(t) d_q t,$$

representa la q -integral de Jackson (véase [65, 85] o la sección 2.5.1), ρ es una función peso que satisface la ecuación en diferencias de tipo Pearson

$$\Delta[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s)\nabla x_1(s) \iff \frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s)}{\sigma(s+1)},$$

y $x(s) = c_1 q^s + c_3$.

Si se considera ahora la sucesión de q -polinomios ortogonales respecto al funcional q -lineal $\mathbf{c}_q$, estos satisfacen la ecuación lineal en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrico (4.14) [115]. Además, estas familias satisfacen varias relaciones algebraicas tales como una RRTT

$$x(s)P_n(s) = \alpha_n P_{n+1}(s) + \beta_n P_n(s) + \gamma_n P_{n-1}(s), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.6)$$

tomando $P_{-1} \equiv 0$, las relaciones estructura (o fórmulas de diferenciación)

$$\begin{aligned} \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} &= \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \tilde{\beta}_n P_n(s) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Theta(s) \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} &= \hat{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \hat{\beta}_n P_n(s) + \hat{\gamma}_n P_{n-1}(s), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde, como antes, $\Theta(s) = \sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s)$, así como la fórmula de Christoffel-Darboux

$$K_n(s_1, s_2) := \sum_{m=0}^n \frac{P_m(s_1)P_m(s_2)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2} \frac{P_{n+1}(s_1)P_n(s_2) - P_{n+1}(s_2)P_n(s_1)}{x(s_1) - x(s_2)}. \quad (6.8)$$

De ahora en adelante se denotará por $\mathbb{K}_n(s_0)$ al valor $K_n(s_0, s_0)$. A partir de (6.8) y (6.7) se sigue que

1. Si $\sigma(s_0) = 0$, entonces

$$K_{n-1}(s, s_0) = \frac{P_n(s_0)}{d_n^2 \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} - \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n} \right)} \left[\frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n} P_n(s) - \frac{\sigma(s)}{x(s) - x(s_0)} \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} \right]. \quad (6.9)$$

2. Si $\Theta(s_0) = 0$, entonces

$$K_{n-1}(s, s_0) = \frac{P_n(s_0)}{d_n^2 \left(\frac{\hat{\gamma}_n}{\gamma_n} - \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_n} \right)} \left[\frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_n} P_n(s) - \frac{\Theta(s)}{x(s) - x(s_0)} \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} \right]. \quad (6.10)$$

Nota 6.2.1. Un cálculo directo muestra que $\frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n}$ y $\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n}$ son independientes de la normalización empleada para P_n , i.e. si $\hat{P}_n(s) = C_n P_n(s)$ entonces dichos radios no cambian. Además ([9, ec. (6.15)])

$$\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} - \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n} = \frac{\hat{\gamma}_n}{\gamma_n} - \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_n}.$$

6.2.2. Ejemplos

En esta sección se incluirán las principales propiedades de las familias de q -polinomios que se estudiarán en el resto de la sección (para más detalles véase [85]). En todos los casos se ha usado (6.9) y (6.10) para calcular los núcleos en los puntos correspondientes. De ahora en adelante se consideraran, además, medidas de probabilidad, i.e. $d_0^2 = 1$. Este hecho será útil para obtener los límites correctos para los correspondientes q -polinomios tipo Krall. A partir de ahora se empleará la notación estándar para las series hipergeométricas básicas. Para más detalles véase [65] y la sección 2.4.1 de la presente memoria.

1. *Los q -polinomios grandes de Jacobi:*

Esta familia de polinomios fue introducida por Hahn en 1949 y son, como se mencionó con anterioridad, la familia más general de q -polinomios sobre la red q -lineal $x := x(s) = q^s$. Dicha familia es una sucesión de q -polinomios ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \mathbf{c}^{BqJ}, P \rangle := \int_{cq}^{aq} P(x) \rho(x) d_q x, \quad (6.11)$$

donde la función peso ρ , está soportada sobre $[cq, aq]$, con $0 < a, b < q^{-1}$, $c < 0$ (véase la tabla A.3). Si además se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} P_n(aq; a, b, c; q) &= \frac{(abc^{-1}q; q)_n}{(cq; q)_n} \left(-cq^{\frac{n+1}{2}}\right)^n, \\ P_n(cq; a, b, c; q) &= \frac{(bq; q)_n}{(aq; q)_n} \left(-aq^{\frac{n+1}{2}}\right)^n, \end{aligned}$$

se obtienen las siguientes expresiones para los núcleos

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{BqJ}(x, aq) &= \frac{(aq, abq; q)_n}{(q, bq; q)_n} \left[\frac{(1-q^{-n})P_n(x; a, b, c; q) - (x-cq)(1-q^{-1})\mathcal{D}_{q^{-1}}P_n(x; a, b, c; q)}{(1-abq)a^n} \right], \\ K_{n-1}^{BqJ}(x, 1) &= \frac{aq(aq, abq, cq; q)_n}{(q, bq, abc^{-1}q; q)_n} \left[\frac{b(q^n-1)P_n(x; a, b, c; q) - (bx-c)(q-1)\mathcal{D}_qP_n(x; a, b, c; q)}{(1-abq)(-acq^{n/2+1/2})^n} \right], \\ K_{n-1}^{BqJ}(x, cq) &= \frac{(abq, cq; q)_n}{(q, abc^{-1}q; q)_n} \left[\frac{(1-q^{-n})P_n(x; a, b, c; q) - (x-aq)(1-q^{-1})\mathcal{D}_{q^{-1}}P_n(x; a, b, c; q)}{(1-abq)c^n} \right], \end{aligned} \quad (6.12)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{n-1}^{BqJ}(aq) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-abq^{2k+1})(aq, abq, abc^{-1}q; q)_k}{(1-abq)(q, bq, cq; q)_k} \left(-a^{-1}cq^{\frac{k-1}{2}}\right)^k, \\ \mathbb{K}_{n-1}^{BqJ}(cq) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-abq^{2k+1})(bq, abq, cq; q)_k}{(1-abq)(q, aq, abc^{-1}q; q)_k} \left(-ac^{-1}q^{\frac{k-1}{2}}\right)^k, \\ \mathbb{K}_{n-1}^{BqJ}(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-abq^{2k+1})(aq, abq, cq; q)_k}{(1-abq)(q, bq, abc^{-1}q; q)_k} \left(-acq^{\frac{k+3}{2}}\right)^{-k}, \\ K_{n-1}^{BqJ}(aq, cq) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-abq^{2k+1})(abq; q)_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(1-abq)(q; q)_k} = \frac{(abq^2; q)_{n-1}}{(q; q)_{n-1}} (-1)^n q^{\binom{n}{2}}, \\ K_{n-1}^{BqJ}(aq, 1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-abq^{2k+1})(aq, abq; q)_k}{(1-abq)(q, bq; q)_k (aq)^k} = \frac{(aq^2, abq^2; q)_{n-1}}{(q, bq; q)_{n-1} (aq)^{n-1}}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}_q$ es, como antes, la q -diferencia de Jackson (véase por ejemplo [85] o la sección 2.5.1 de la presente memoria),

$$\mathcal{D}_q P(z) = \frac{P(qz) - P(z)}{(q-1)z}.$$

Nota 6.2.2. Los polinomios grandes de Laguerre, $P_n(x; a, c; q)$, son un caso particular de los grandes de Jacobi:

$$P_n(x; a, c; q) = P_n(x; a, 0, c; q),$$

por tanto todas sus propiedades pueden obtenerse de las correspondientes propiedades de los q -polinomios grandes de Jacobi tomando $b = 0$. Por otro lado, un caso especial de los q -polinomios grandes de Laguerre son los q -polinomios afines de Kravchuk [85, p. 101]

$$K_n^{Aff}(q^{-s}; p, N; q) = P_n(q^{-s}; p, q^{-N-1}; q),$$

de ahí que se pueda realizar un proceso análogo para estos.

2. Los q -polinomios de Meixner:

Estos q -polinomios son ortogonales respecto al funcional q -lineal

$$\langle \mathbf{c}^{qM}, P \rangle := \sum_{s=0}^{\infty} P(s) \rho(s) q^{-s}, \quad (6.13)$$

donde la función peso ρ está soportada sobre $[1, +\infty)$, con $0 < b < q^{-1}$, $0 < c$ (véase la tabla A.6). Además, $M_n(1; b, c|q) = 1$, y

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{qM}(x, 1) &= \frac{(bq; q)_n}{(q, -c^{-1}q; q)_n} [(1 - q^n) M_n(x; b, c; q) - (x + bc)(1 - q) \mathcal{D}_{q^{-1}} M_n(x; b, c; q)], \\ \mathbb{K}_{n-1}^{qM}(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(bq; q)_k}{(q, -c^{-1}q; q)_k} q^k. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Nota 6.2.3. Un caso especial de los q -polinomios de Meixner son los q -polinomios cuánticos de Kravchuk [85, p. 98]

$$K_n^{qtm}(q^{-s}; p, N; q) = M_n(q^{-s}; q^{-N-1}, -p^{-1}; q).$$

3. Los q -polinomios de Laguerre:

Esta familia de q -polinomios es ortogonal respecto al funcional lineal

$$\langle \mathcal{C}^{qL}, P \rangle := \sum_{s=-\infty}^{+\infty} P(cq^k) \rho(s) q^s, \quad (6.15)$$

donde la función peso ρ (véase la tabla A.6 y la relación límite (A.6)) está soportada sobre $[0, +\infty)$, $a = q^\alpha$, $x := x(s) = cq^s$. En este caso $L_n^{(\alpha)}(0; q) = (aq; q)_n / (q; q)_n$, y

$$K_{n-1}^{qL}(x, 0) = \frac{1 - q^{-1}}{a} \mathcal{D}_q L_n^{(\alpha)}(q^{-1}x; q), \quad \mathbb{K}_{n-1}^{qL}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(aq; q)_k}{(q; q)_k} q^k = \frac{(aq^2; q)_{n-1}}{(q; q)_{n-1}}. \quad (6.16)$$

4. Los q -polinomios de Stieltjes-Wigert:

Para esta familia de q -polinomios el problema de momentos es indeterminado, es decir, existen infinitas representaciones para el funcional lineal $\mathbf{c}^{SW}$ respecto al que ellos son ortogonales (véase, por ejemplo, [85]). Aquí se elegirá el siguiente

$$\langle \mathbf{c}^{SW}, P \rangle := \int_0^\infty P(x) \rho(x) dx, \quad (6.17)$$

donde ρ es una función peso soportada sobre $[0, +\infty)$ (véase la tabla A.6 y la relación límite (A.9)).

En este caso $S_n(0; q) = 1/(q; q)_n$, luego

$$K_{n-1}^{SW}(x, 0) = (1 - q^{-1}) \mathcal{D}_q S_n(q^{-1}x; q), \quad \mathbb{K}_{n-1}^{SW}(0) = \frac{1}{(q; q)_{n-1}}. \quad (6.18)$$

6.2.3. Los q -polinomios tipo Krall

En esta sección se introducirán los q -polinomios ortogonales tipo Krall. En un artículo reciente [24] se introducen los polinomios discretos tipo Krall como una perturbación de un funcional lineal discreto clásico o semiclásico y desarrollan una teoría general para encontrar las propiedades algebraicas tales como RRTT, ecuaciones lineales en diferencias de segundo orden, etc. En esta memoria se prestará atención al caso especial cuando el funcional de partida, $\mathbf{c}$, es q -clásico [113]. Así, se considerará el funcional lineal $\mathbf{u}$ definido como

$$\langle \mathbf{u}, P \rangle = \langle \mathbf{c}, P \rangle + AP(x_0) + BP(x_1), \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad (6.19)$$

donde $\mathbf{c}$ es el funcional lineal considerado en (6.5) y $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$. En [24] se presenta una teoría general para resolver este problema cuando se añaden N masas, no obstante sólo dos ejemplos se consideraron en detalle. Aquí se completará dicho trabajo introduciéndose nuevos ejemplos y estableciendo las relaciones límite entre ellos, de forma análoga como se hizo en [21].

La expresión explícita de los polinomios, $\tilde{P}_n^{A,B}$, ortogonales respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ (6.19) viene dada por [24]

$$\tilde{P}_n(x) = P_n(x) - \sum_{i=1}^M A_i \tilde{P}_n(a_i) K_{n-1}(x, a_i), \quad (6.20)$$

donde $(\tilde{P}_n(a_k))_{k=1}^M$ es la solución del sistema

$$\tilde{P}_n(a_k) = P_n(a_k) - \sum_{i=1}^M A_i \tilde{P}_n(a_i) K_{n-1}(a_k, a_i), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

La fórmula (6.20) fue obtenida por primera vez por V. B. Uvarov [136] (véase también [74, §2.9]). Por tanto, la fórmula [24, p.57, ec. (2.5)] da lugar a

$$\tilde{P}_n^{A,B}(s) = P_n(s) - \begin{bmatrix} AK_{n-1}(x, x_0) \\ BK_{n-1}(x, x_1) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 + A\mathbb{K}_{n-1}(x_0) & BK_{n-1}(x_0, x_1) \\ AK_{n-1}(x_1, x_0) & 1 + B\mathbb{K}_{n-1}(x_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_n(x_0) \\ P_n(x_1) \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

donde C^t denota a la matriz transpuesta de C . Además, los polinomios $P_n^{A,B}$ existen para cada $n = 0, 1, \dots$ si y sólo si se satisface la siguiente condición

$$\det \begin{bmatrix} 1 + A\mathbb{K}_{n-1}(x_0) & BK_{n-1}(x_0, x_1) \\ AK_{n-1}(x_1, x_0) & 1 + B\mathbb{K}_{n-1}(x_1) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.22)$$

Cuando la masa B es nula, i.e. $B = 0$, la expresión (6.21) se transforma en

$$\tilde{P}_n^A(s) = P_n(s) - A\tilde{P}_n^A(x_0)K_{n-1}(s, x_0), \quad \tilde{P}_n^A(x_0) = \frac{P_n(x_0)}{1 + A\mathbb{K}_{n-1}(x_0)}. \quad (6.23)$$

Nótese que si $B = 0$ y $A \geq 0$, entonces la condición (6.22) da lugar a

$$1 + A\mathbb{K}_{n-1}(x_0) \geq 1 > 0,$$

por lo tanto P_n^A existe para todo $n = 0, 1, \dots$

El siguiente paso consiste en construir las correspondientes familias de q -polinomios tipo Krall asociadas a cada una de las familias de q -polinomios clásicos consideradas en la sección 6.2.2. Se comenzará con la familia de los q -polinomios grandes de Jacobi dado que las demás familias pueden obtenerse tomando límites apropiados. Además, se elegirán los valores de x_0 y x_1 de manera que los núcleos (6.8) tengan la forma más sencilla, es decir, (6.9) y (6.10).

6.2.4. Ejemplo con dos masas: Los q -polinomios grandes de Jacobi tipo Krall

Sea $\mathbf{u}^{BqJ}$ el funcional definido por

$$\langle \mathbf{u}^{BqJ}, P \rangle = \langle \mathbf{c}^{BqJ}, P \rangle + AP(x_0) + BP(x_1), \quad A, B \geq 0,$$

donde $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{c}^{BqJ}$ es el funcional q -lineal (6.11). Los polinomios correspondientes se denotarán por $P_n^{A,B}(x; a, b, c; q)$ y constituyen un q -análogo de los polinomios de Koornwinder [88]. La expresión polinómica para esta familia se sigue de (6.21)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= P_n(x; a, b, c; q) - \begin{bmatrix} AK_{n-1}^{BqJ}(x; x_0) & BK_{n-1}^{BqJ}(x; x_1) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 + A\mathbb{K}_{n-1}^{BqJ}(x_0) & BK_{n-1}^{BqJ}(x_0, x_1) \\ AK_{n-1}^{BqJ}(x_1, x_0) & 1 + B\mathbb{K}_{n-1}^{BqJ}(x_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_n(x_0; a, b, c; q) \\ P_n(x_1; a, b, c; q) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A continuación se considerarán dos casos específicos – aunque no por ello de menor relevancia –.

1. Los q -polinomios de Koornwinder:

Estos se obtienen cuando se añaden las masas en los puntos frontera del intervalo de ortogonalidad de los q -polinomios grandes de Jacobi, i.e., $x_0 = cq$ y $x_1 = aq$. Para estos valores

$$\tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) := P_n(x; a, b, c; q) - A\tilde{P}_n^{A,B}(cq)K_{n-1}^{BqJ}(x, cq) - B\tilde{P}_n^{A,B}(aq)K_{n-1}^{BqJ}(x, aq).$$

Entonces usando (6.12) se obtiene

$$\tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) = (1 - (1 - q^{-n})A_n)P_n(x; a, b, c; q) + (1 - q^{-1})B_n(x)\mathcal{D}_{q^{-1}}P_n(x; a, b, c; q), \quad (6.24)$$

donde

$$A_n = \frac{(abq; q)_n}{(1 - abq)(q; q)_n} \left(A\tilde{P}_n^{A,B}(cq) \frac{(cq; q)_n}{c^n(abq^{-1}q; q)_n} + B\tilde{P}_n^{A,B}(aq) \frac{(aq; q)_n}{a^n(bq; q)_n} \right)$$

y

$$B_n(x) = \frac{(abq; q)_n}{(1 - abq)(q; q)_n} \left(A\tilde{P}_n^{A,B}(cq) \frac{(cq; q)_n(x - cq)}{c^n(abq^{-1}q; q)_n} + B\tilde{P}_n^{A,B}(aq) \frac{(aq; q)_n(x - aq)}{a^n(bq; q)_n} \right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} x\tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= \left((1 - (1 - q^{-n})A_n)x + B_n(x) \right) P_n(x; a, b, c; q) \\ &\quad - B_n(x)P_n(q^{-1}x; a, b, c; q). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Teniendo en cuenta las identidades [85, (3.5.6), (3.5.7)] para los q -polinomios grandes de Jacobi

$$\begin{aligned} P_n(x; a, b, c; q) - P_n(qx; a, b, c; q) &= \frac{q(q^{-n} - 1)(1 - abq^{n+1})}{(1 - aq)(1 - cq)} xP_{n-1}(qx; aq, bq, cq; q), \\ \mathcal{D}_q P_n(x; a, b, c; q) &= \frac{q(q^{-n} - 1)(1 - abq^{n+1})}{(1 - q)(1 - aq)(1 - cq)} P_{n-1}(qx; aq, bq, cq; q), \end{aligned}$$

la expresión (6.24) puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= (1 - (1 - q^{-n})A_n)P_n(x; a, b, c; q) \\ &\quad + B_n(x) \frac{(1 - q^{-n})(1 - abq^{n+1})}{(1 - aq)(1 - cq)} P_{n-1}(x; aq, bq, cq; q). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Antes de analizar el siguiente caso se mostrará que estos polinomios pueden ser escritos en términos de las series hipergeométricas básicas. De hecho, por definición de los q -polinomios grandes de Jacobi y (6.26) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= \frac{(1 - (1 - q^{-n})A_n)}{(1 - aq)(1 - cq)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1}, x; q)_k q^k}{(aq^2, cq^2, q; q)_k} \\ &\times \left((1 - aq^{k+1})(1 - cq^{k+1}) + \tilde{B}_n(x)(1 - abq^{n+k+1})(1 - q^{-n+k}) \right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde

$$\tilde{B}_n(x) = \frac{B_n(x)}{1 - (1 - q^{-n})A_n}.$$

Si se usa la identidad

$$(q^{\alpha+1}; q)_m (1 - q^\alpha) = (q^\alpha; q)_m (1 - q^{\alpha+m}),$$

así como el hecho que el polinomio

$$(1 - aq^{k+1})(1 - cq^{k+1}) + \tilde{B}_n(x)(1 - abq^{n+k+1})(1 - q^{-n+k}),$$

en q^k tiene dos ceros, q^{α_1} , y q^{α_2} los cuales dependen, en general, de todos los parámetros, i.e., $\alpha_{1,2} := \alpha_{1,2}(n, x; a, b, c, A, B; q)$, se sigue que

$$\tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) = \tilde{D}_n(x) {}_5\phi_4 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, q^{1-\alpha_1}, q^{1-\alpha_2}, x \\ aq^2, cq^2, q^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2} \end{matrix} \middle| q; q \right), \quad (6.28)$$

donde

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{aq(1 - (1 - q^{-n})A_n)(1 - q^{\alpha_1})(1 - q^{\alpha_2})}{(1 - aq)(1 - cq)} \left[cq + \frac{bB_n(x)}{1 - (1 - q^{-n})A_n} \right].$$

Nota 6.2.4. Nótese que $\tilde{D}_n$ es, en general, un polinomio de grado 1 en x . Para convencerse que P_n es un polinomio de grado n basta evaluar (6.27) para $k = n$ dado que en este caso el segundo término del último corchete se anula.

2. Caso $x_0 = aq$ y $x_1 = 1$:

Para estos valores

$$\hat{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) := P_n(x; a, b, c; q) - A\hat{P}_n^{A,B}(aq)K_{n-1}^{BqJ}(x, aq) - B\hat{P}_n^{A,B}(1)K_{n-1}^{BqJ}(x, 1).$$

Entonces usando (6.12) se obtiene que

$$\begin{aligned} \hat{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= (1 - (1 - q^{-n})\hat{A}_n(\hat{A}_n(\hat{A}_n(aq) + B\hat{P}_n^{A,B}(1)\hat{C}_n))P_n(x; a, b, c; q) \\ &\quad + \hat{A}_n(1 - q^{-1})A\hat{P}_n^{A,B}(aq)(x - cq)\mathcal{D}_{q^{-1}}P_n(x; a, b, c; q) \\ &\quad + \hat{A}_n(q - 1)B\hat{P}_n^{A,B}(1)\hat{C}_n(bx - c)\mathcal{D}_qP_n(x; a, b, c; q), \end{aligned}$$

donde

$$\hat{A}_n = \frac{(aq, abq; q)_n}{(1 - abq)(q, bq; q)_n a^n} \quad y \quad \hat{C}_n = \frac{abq(cq; q)_n}{(abc^{-1}q; q)_n (-c)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} x\hat{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) &= \left(x + \hat{A}_n A\hat{P}_n^{A,B}(aq) (q^{-n}x - cq) + \hat{A}_n B\hat{P}_n^{A,B}(1)\hat{C}_n (x(q^{-n} - 1 - b) + c) \right) \\ &\quad \times P_n(x; a, b, c; q) - \hat{A}_n A\hat{P}_n^{A,B}(aq) (x - cq) P_n(q^{-1}x; a, b, c; q) \\ &\quad + \hat{A}_n B\hat{P}_n^{A,B}(1)\hat{C}_n (bx - c) P_n(qx; a, b, c; q). \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea que en el caso anterior se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\widehat{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) = & (1 - (1 - q^{-n})\widehat{A}_n(AP_n^{A,B}(aq) + BP_n^{A,B}(1)\widehat{C}_n))P_n(x; a, b, c; q) \\ & - \mathbb{A}_n AP_n^{A,B}(aq)(x - cq)P_{n-1}(x; aq, bq, cq; q) \\ & - q\mathbb{A}_n BP_n^{A,B}(1)\widehat{C}_n(bx - c)P_{n-1}(qx; aq, bq, cq; q),\end{aligned}\quad (6.29)$$

donde

$$\mathbb{A}_n = \widehat{A}_n \frac{(1 - q^{-n})(1 - abq^{n+1})}{q(1 - aq)(1 - cq)}.$$

Esta familia también admite una representación en términos de las series hipergeométricas básicas. De hecho tras algunos cálculos sencillos, como en el caso previo, se obtiene que

$$\widehat{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) = \widehat{D}_n(x) {}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, q^{1-\beta_1}, q^{1-\beta_2}, q^{1-\beta_3}, x \\ aq^2, cq^2, q^{-\beta_1}, q^{-\beta_2}, q^{-\beta_3} \end{matrix} \middle| q; q \right), \quad (6.30)$$

donde $\widehat{D}_n(x)$ depende de los parámetros definidos para esta familia y, q^{β_1} , q^{β_2} y q^{β_3} , son los ceros de cierto polinomio de tercer grado en q^k , que también dependen de dichos parámetros, i.e. $\beta_i := \beta_i(n, x; a, b, c, A, B; q)$, $i = 1, 2, 3$.

Nota 6.2.5. Casos particulares de estas familias:

Tomando $A = 0$ en (6.28) se obtienen los polinomios

$$\widetilde{P}^B(x; a, b, c; q) = \widetilde{D}_n^B(x) {}_5\varphi_4 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, q^{1-\alpha_1}, q^{1-\alpha_2}, x \\ aq^2, cq^2, q^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2} \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

y tomando $A = 0$ en (6.30)

$$\widehat{P}^B(x; a, b, c; q) = \widehat{D}_n^B(x) {}_6\varphi_5 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, q^{1-\beta_1}, q^{1-\beta_2}, q^{1-\beta_3}, x \\ aq^2, cq^2, q^{-\beta_1}, q^{-\beta_2}, q^{-\beta_3} \end{matrix} \middle| q; q \right).$$

Sustituyendo en todas las fórmulas anteriores $c = q^{-N-1}$ se obtienen los q -polinomios de Hahn tipo Krall.

Antes de continuar, ténganse en cuenta que las familias anteriores, así como las que se mostrarán a continuación, satisfacen una RRTT y una ecuación lineal en diferencias de segundo orden. Para más detalles véase [24].

6.2.5. Ejemplos con una masa

□ Los q -polinomios de Meixner tipo Krall

Estos polinomios son ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \mathbf{u}^{qM}, P \rangle = \langle \mathbf{c}^{qM}, P \rangle + AP(1), \quad A \geq 0,$$

donde $\mathbf{c}^{qM}$ es el funcional definido en (6.13) asociado a los q -polinomios de Meixner.

La expresión explícita para esta familia es (véase (6.20), (6.14))

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_n^A(x; a, b; q) &= M_n(x; a, b|q) - A \frac{M_n(1; a, b|q) K_{n-1}^{qM}(x, 1)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{qM}(1)} \\ &= M_n(x; a, b|q) - A \frac{M_n(1; a, b|q)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{qM}(1)} \frac{(bq; q)_n}{(q, -c^{-1}q; q)_n} \left((1 - q^n) M_n(x; b, c; q) \right. \\ &\quad \left. - (x + bc)(1 - q) \mathcal{D}_{q^{-1}} M_n(x; b, c; q) \right).\end{aligned}$$

Para esta familia se obtiene una serie hipergeométrica básica ${}_3\varphi_2$.

□ Los q -polinomios de Laguerre tipo Krall

Estos polinomios son ortogonales respecto al funcional q -lineal

$$\langle \mathbf{u}^{qL}, P \rangle = \langle \mathbf{c}^{qL}, P \rangle + AP(0), \quad A \geq 0,$$

donde $\mathbf{c}^{qL}$ es el funcional definido en (6.15) asociado a los q -polinomios de Laguerre. En este caso (6.20) y (6.16) dan lugar a

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^{(\alpha), A}(x; q) &= L_n^{(\alpha)}(x; q) - A \frac{L_n^{(\alpha)}(0; q) K_{n-1}^{qL}(x, 0)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{qL}(0)} \\ &= L_n^{(\alpha)}(x; q) - A \frac{L_n^{(\alpha)}(0; q)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{qL}(0)} \frac{1 - q^{-1}}{a} \mathcal{D}_q L_n^{(\alpha)}(q^{-1}x; q). \end{aligned}$$

Esta familia también se representa mediante una serie hipergeométrica básica ${}_3\varphi_2$.

□ Los polinomios de Stieltjes-Wigert tipo Krall

Esta familia de polinomios, que fue estudiada por primera vez en [55], son ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \mathbf{u}^{SW}, P \rangle = \langle \mathbf{c}^{SW}, P \rangle + AP(0), \quad A \geq 0,$$

donde $\mathbf{c}^{SW}$ es el funcional definido en (6.17) asociado a los polinomios de Stieltjes-Wigert. La representación para esta familia tiene la forma (see (6.20), (6.18))

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^A(x; q) &= S_n(x; q) - A \frac{S_n(0; q) K_{n-1}^{SW}(x, 0)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{SW}(0)} \\ &= S_n(x; q) - A \frac{S_n(0; q)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}^{SW}(0)} (1 - q^{-1}) \mathcal{D}_q S_n(q^{-1}x; q). \end{aligned}$$

Este caso da lugar a una serie hipergeométrica básica ${}_2\varphi_2$.

6.2.6. Algunas propiedades algebraicas de $\tilde{P}_n^A$

En [24] se mostró que los q -polinomios de tipo Krall satisfacen una ecuación lineal de segundo orden de la forma

$$f^A(n, s)y(s+1) + g^A(n, s)y(s) + h^A(n, s)y(s-1) = 0, \quad (6.31)$$

así como una expresión explícita (en términos de los parámetros de la familia inicial) dándose los coeficientes f^A , g^A , y h^A . También en [24] se calcula la RRTT para los polinomios $\tilde{P}_n^A$,

$$x(s)\tilde{P}_n^A(x(s)) = \alpha_n^A \tilde{P}_{n+1}^A(x(s)) + \beta_n^A \tilde{P}_n^A(x(s)) + \gamma_n^A \tilde{P}_{n-1}^A(x(s)), \quad (6.32)$$

donde los coeficientes α_n^A , β_n^A , y γ_n^A vienen dados por

$$\begin{aligned} \alpha_n^A &= \alpha_n, \quad \gamma_n^A = \alpha_{n-1} \frac{\tilde{d}_n^2}{\tilde{d}_{n-1}^2} \neq 0, \\ \beta_n^A &= \beta_n + \frac{AP_n(x(s_0))}{\tilde{d}_n^2} \left(\alpha_n \frac{P_{n+1}(x(s_0))}{1 + A \mathbb{K}_n(s_0)} - \gamma_n \frac{P_{n-1}(x(s_0))}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}(s_0)} \right), \end{aligned}$$

donde α_n , β_n , y γ_n son los coeficientes de la RRTT de la familia de q -polinomios iniciales (6.6), $d_n^2 = \langle \mathbf{c}, P_n P_n \rangle$ y

$$\tilde{d}_n^2 = \langle \mathbf{u}, \tilde{P}_n^A \tilde{P}_n^A \rangle = d_n^2 + \left[A \tilde{P}_n^A(s_0) \right]^2 \mathbb{K}_{n-1}(s_0) + A \left[\tilde{P}_n^A(s_0) \right]^2 = \frac{1 + A \mathbb{K}_n(s_0)}{1 + A \mathbb{K}_{n-1}(s_0)} d_n^2,$$

es el cuadrado de la norma del polinomio P_n y P_n^A , respectivamente.

□ Ejemplos

Aquí se mostrarán sólo las expresiones explícitas para dos de los ejemplos.

Para los q -polinomios de Laguerre tipo Krall se tiene

$$\begin{aligned} f^A(n, s) &= a(q^s + 1)((1 + b_n(s))(1 + b_n(s-1)) \\ &\quad - (1 + b_n(s))b_n(s-1)(a(1 + q^{s+n-1}) + 1) + b_n(s)b_n(s-1)a(q^{s-1} + 1)), \\ g^A(n, s) &= (1 + b_n(s+1))b_n(s-1)a(q^{s-1} + 1) + (1 - ab_n(s-1)(1 + q^{s+n-1})) \\ &\quad \times ((1 + b_n(s+1))(a(1 + q^{s+n}) + 1) - a(q^s + 1)b_n(s+1)), \\ h^A(n, s) &= ((1 + b_n(s+1))(1 + b_n(s)) \\ &\quad - (1 + b_n(s+1))b_n(s)(a(1 + q^{s+n}) + 1) + b_n(s+1)b_n(s)a(q^s + 1)), \\ \alpha_n^A &= -(1 - q^{n+1})q^{-2n-1}a^{-1}, \\ \beta_n^A &= q^{-2n-1}[(1 - q^{n+1}) + q(1 - q^n a)]a^{-1} \\ &\quad - A \frac{(aq; q)_n^2}{a(1 - aq^n)(q; q)^2 q^{2n+1}} ((1 - aq^n)(1 - aq^{n+1}) - q^2(1 - q^{n-1})(1 - q^{n-2})), \\ \gamma_n^A &= -\frac{1 - aq^n}{aq^{2n}} \frac{((1 + Aq^n)(q; q)_{n-1} + A(aq^2; q)_{n-1})((q; q)_{n-2} + A(aq^2; q)_{n-2})}{((1 + Aq^{n-1})(q; q)_{n-2} + A(aq^2; q)_{n-2})((q; q)_{n-1} + A(aq^2; q)_{n-1})}, \end{aligned}$$

donde

$$b_n(s) = -\frac{A(aq; q)_n(1 + q^{-s})}{(1 - q^n)((q; q)_{n-1} + A(aq^2; q)_{n-1})q^n}.$$

Por último, para los q -polinomios de Stieltjes-Wigert-Krall se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} f^A(n, s) &= q^s(((1 + b_n(s))(1 + b_n(s-1)) \\ &\quad - (1 + b_n(s))b_n(s-1)(q^{s+n-1} + 1) - b_n(s)b_n(s-1)q^{s-1}), \\ g^A(n, s) &= (1 + b_n(s+1))b_n(s-1)q^{s-1} + ((1 + b_n(s+1))(q^{s+n} + 1) + b_n(s+1)q^s) \\ &\quad \times ((1 + b_n(s-1)) + b_n(s-1)(q^{s+n-1} + 1)), \\ h^A(n, s) &= ((1 + b_n(s+1))(1 + b_n(s)) \\ &\quad - (1 + b_n(s+1))b_n(s)(q^{s+n} + 1) - b_n(s+1)b_n(s)q^s), \\ \alpha_n^A &= -(1 - q^{n+1})q^{-2n-1}, \\ \beta_n^A &= (1 + q - q^{n+1})q^{-2n-1} - \frac{A}{q^{3n+1}} \left(\frac{1}{(q; q)_n + A} - \frac{q^3}{(q; q)_{n-1} + A} \right), \\ \gamma_n^A &= -\frac{1}{q^{2n+2}} \frac{((q; q)_n + A)((q; q)_{n-1} + A(1 - q^{n-1}))}{((q; q)_{n-1} + A)((q; q)_n + A(1 - q^n))}, \end{aligned}$$

siendo

$$b_n(s) = -\frac{Aq^{-s}}{(q; q)_n + A(1 - q^n)}.$$

6.2.7. Las relaciones límite entre los q -polinomios tipo Krall

En esta sección se estudiarán las relaciones límite que envuelven a los q -polinomios de tipo Krall asociados a las familias de q -polinomios de la tabla de Hahn [90, 113]. Como ya se mencionó los q -polinomios de Koornwinder, $\tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q)$, (6.25) son los q -análogos de los polinomios de Koornwinder, $P_n^{A,B}(x)$, [88]. De hecho, un cálculo directo muestra que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \tilde{P}_n^{A,B}(x; a, b, c; q) = P_n^{A,B}(x).$$

A continuación se mostrarán otros casos límite:

Nota 6.2.6. Aunque sólo se mostraron algunos de los ejemplos considerados en [17], por interés del lector se mostrarán todos los límites considerados en dicha publicación.

1. q -polinomios grandes de Jacobi $\rightarrow$ q -polinomios grandes de Laguerre:

Se sabe que los q -polinomios grandes de Laguerre son un caso especial de los q -polinomios grandes de Jacobi tomando $b = 0$, i.e.

$$P_n(x; a, 0, c; q) = P_n(x; a, c; q).$$

Luego, por (6.23) se obtiene que

$$\tilde{P}_n^A(x; a, 0, c; q) = \tilde{P}_n^A(x; a, c; q).$$

2. q -polinomios grandes de Jacobi $\rightarrow$ q -polinomios pequeños de Jacobi:

Los q -polinomios pequeños q -Jacobi pueden obtenerse a partir de los q -polinomios grandes de Jacobi a través del cambio de variable $x \rightarrow cqx$ y tomando el límite $c \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} P_n(cqx; a, b, c; q) = p_n(x; a, b|q).$$

En este caso, poniendo $xcq = aq$ y tomando el límite $c \rightarrow \infty$ se obtiene que $x \rightarrow 0$, por tanto

$$\lim_{c \rightarrow \infty} P_n(aq; a, b, c; q) = p_n(0; a, b|q).$$

Teniendo en cuenta que la norma de los q -polinomios grandes de Jacobi se transforma en la norma de los q -polinomios pequeños de Jacobi se obtiene que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^A(cqx; a, b, c; q) = \tilde{p}_n^A(x; a, b|q).$$

3. q -polinomios grandes de Jacobi $\rightarrow$ q -polinomios de Meixner:

Si se toma el límite $a \rightarrow \infty$ en los q -polinomios grandes de Jacobi se obtienen los q -polinomios de Meixner [85]. Por tanto, a partir de (6.23) se deduce

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^A(q^{-s}; a, b, c; q) = \tilde{M}_n^A(q^{-s}; c, -b^{-1}; q).$$

4. q -polinomios grandes de Jacobi $\rightarrow$ q -polinomios de Hahn $\rightarrow$ Hahn:

Tomando $c = q^{-N-1}$ en los q -polinomios grandes de Jacobi se obtienen los q -polinomios de Hahn, i.e.

$$\hat{P}_n^{A,B}(x; a, b, q^{-N-1}; q) = \hat{Q}_n^{A,B}(x; a, b, N|q).$$

Ahora, sustituyendo $x = q^{-x}$, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, se recuperan los polinomios de Hahn tipo Krall estudiados en [20]

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \hat{Q}_n^{0,A}(q^{-x}; q^\alpha, q^\beta, q^{-N-1}|q) = Q_n^{0,A}(x; \alpha, \beta, N).$$

Nótese que a partir de los polinomios de Hahn tipo Krall es posible obtener diversas familias de polinomios tipo Krall utilizando los límites apropiados (véase [21]).

5. **q -polinomios grandes de Laguerre $\rightarrow$ polinomios de Al-Salam & Carlitz I.** Sustituyendo $x \rightarrow aqx$ y $c \rightarrow ac$ en los q -polinomios grandes de Laguerre y tomando el límite $a \rightarrow 0$ se obtienen los Al-Salam & Carlitz I, i.e.,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{P_n(aqx; a, ac; q)}{a^n} = q^n U_n^{(c)}(x; q).$$

Por tanto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{P}_n^A(aqx; a, ac; q)}{a^n} = q^n \tilde{U}_n^{(c), A}(x; q).$$

6. **q -polinomios grandes de Laguerre $\rightarrow q$ -polinomios pequeños de Laguerre/Wall:**
Los q -polinomios pequeños de Laguerre pueden obtenerse a partir de los q -polinomios grandes de Laguerre haciendo el límite $x \rightarrow bqx$ y luego tomando el límite $b \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} P_n(bqx; a, b; q) = p_n(x; a|q).$$

Por tanto

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{P}_n^A(bqx; a, b; q) = \tilde{p}_n^A(x; a|q).$$

7. **q -polinomios pequeños de Jacobi $\rightarrow q$ -polinomios pequeños de Laguerre/Wall:**
Tomando $b = 0$ en los q -polinomios pequeños de Jacobi se obtienen los q -polinomios pequeños de Laguerre $p_n(x; a, 0|q) = p_n(x; a|q)$, luego

$$\tilde{p}_n^A(x; a, 0|q) = \tilde{p}_n^A(x; a|q).$$

8. **q -polinomios pequeños de Jacobi $\rightarrow q$ -polinomios de Laguerre:**
En este caso de un cálculo directo resulta

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{p}_n^A\left(-\frac{x}{bq}; q^\alpha, b|q\right) = \frac{(q; q)_n}{(q^{\alpha+1}; q)_n} \tilde{L}_n^{(\alpha), A}(x; q).$$

9. **q -polinomios de Meixner $\rightarrow q$ -polinomios de Laguerre:**
En este caso, de nuevo, de un cálculo directo resulta

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{M}_n^A(cax; a, c; q) = \frac{(q; q)_n}{(q^{\alpha+1}; q)_n} \tilde{L}_n^{(\alpha), A}(x; q).$$

10. **q -polinomios de Meixner $\rightarrow q$ -polinomios de Charlier:**

$$\lim_{b \rightarrow 0} \tilde{M}_n^A(x; b, a; q) = \tilde{C}_n^A(x; a; q).$$

11. **q -polinomios de Laguerre $\rightarrow$ polinomios de Stieltjes-Wigert:**

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{L}_n^{(\alpha), A}(xq^{-\alpha}; q) = \tilde{S}_n^A(x; q).$$

12. **q -polinomios de Charlier $\rightarrow$ polinomios de Stieltjes-Wigert:**

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{C}_n^A(ax; a; q) = (q; q)_n \tilde{S}_n^A(x; q).$$

Antes de terminar este apartado se debe mencionar que para las demás familias de la tabla de Hahn, i.e., los q -polinomios Kravchuk y los q -polinomios alternativos de Charlier, los resultados pueden obtenerse de forma análoga.

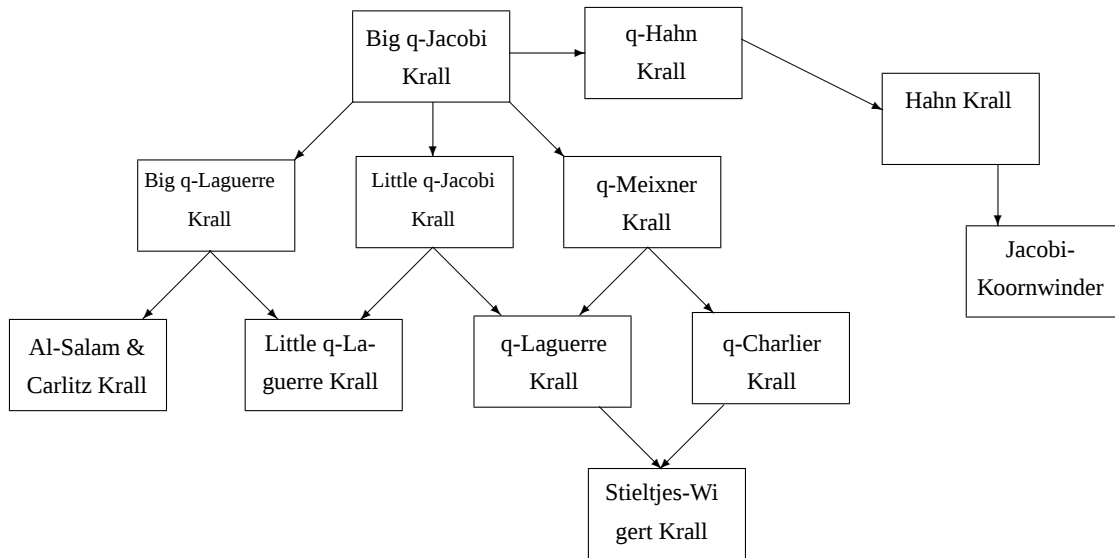


Figura 6.1: La tabla de Hahn-Krall

6.3. Segunda relación de estructura para los q -polinomios semiclásicos

Los q -polinomios de la tabla de Hahn se caracterizan, como se ha visto en el capítulo 3, por su condición de ortogonalidad y por sus relaciones de estructura. Desafortunadamente, para los q -polinomios semiclásicos – los cuales son una generalización de las familias clásicas – sólo se encuentra en la literatura la primera relación de estructura. En este apartado se deducirá una segunda relación de estructura, equivalente a la ya conocida en el caso clásico.

6.3.1. Breve introducción

La primera relación de estructura para los q -polinomios semiclásicos fue establecida en [80]:

Definición 6.3.1. Una sucesión de polinomios ortogonales, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, se dice q -semiclásica si

$$\Phi(s)B_n^{[1]}(s) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \lambda_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma, \quad \lambda_{n,n-\sigma} \neq 0, \quad n \geq \sigma + 1,$$

donde, como antes, $B_n^{[1]}(s) = [n+1]^{-1} \Delta^{(1)} B_{n+1}(s)$, Φ es un polinomio de grado t y σ es un entero no negativo tal que $\sigma \geq \max\{t-2, 0\}$.

Recientemente, F. Marcellán y R. Sfaxi [122] han establecido una segunda relación de estructura para los polinomios semiclásicos estándar.

Teorema 6.1. Para cualesquiera $\sigma \geq 0$, polinomio mónico Φ , con $\text{grd } \Phi = t \leq \sigma + 2$, y sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM), $\{B_n\}_{n \geq 0}$, respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existen números enteros, $p \geq 1$ y $r \geq \sigma + t + 1$, con $\sigma = \max(t-2, p-1)$, tales que

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} B_\nu(x) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma} \varsigma_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(x), \quad n \geq \max(\sigma, t+1), \quad (3.36)$$

donde $B_n^{[1]}(x) = (n+1)^{-1} B'_{n+1}(x)$,

$$\xi_{n,n+\sigma} = \varsigma_{n,n+\sigma} = 1, \quad n \geq \max(\sigma, t+1), \quad \xi_{r,r-\sigma} \varsigma_{r,r-t} \neq 0, \\ \langle (\Phi \mathbf{u})', B_n \rangle = 0, \quad p+1 \leq n \leq 2\sigma+t+1, \quad \langle (\Phi \mathbf{u})', B_p \rangle \neq 0, \quad (\sigma \geq 1),$$

y si $p = t-1$ entonces $\langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi B_p' \rangle \notin \mathbb{N}_0$.

(ii) El funcional lineal $\mathbf{u}$ satisface

$$(\Phi \mathbf{u})' + \Psi \mathbf{u} = 0,$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible, es decir, el polinomio Φ es mónico con $\text{grd } \Phi = t$, $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, y si $p = t-1$ entonces $\frac{1}{n!} \Psi^{(n)}(0) \notin -\mathbb{N}_0$, de orden σ .

El objetivo de este apartado es el de extender este resultado para los q -polinomios semiclásicos de la tabla de Hahn.

Se comenzará por la siguiente definición de *sucesión diagonal* para los polinomios semiclásicos estándar que generaliza la definición dada por P. Maroni y R. Sfaxi en [110].

Definición 6.3.2. Sea $\{B_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM y ϕ un polinomio mónico con $\text{grd } \phi = t$. Cuando existe un número entero $\sigma \geq 0$ tal que

$$\phi(s) B_n(s) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \theta_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad \theta_{n,n-\sigma} \neq 0, \quad n \geq \sigma, \quad (6.33)$$

la sucesión $\{B_n\}_{n \geq 0}$ se dirá **sucesión diagonal asociada a ϕ de índice σ** .

Obviamente, la relación de tipo finito anterior, la cual se llamará relación diagonal, no es más que un caso particular de la segunda relación de estructura para una familia de polinomios. Pero, algunos q -polinomios semiclásicos no son diagonales. Como ejemplo, se menciona el caso de la sucesión de q -polinomios semiclásicos $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ ortogonal respecto al funcional lineal $\mathbf{v}$, tal que se satisface la ecuación funcional: $\Delta^{(1)} \mathbf{v} = \Psi \mathbf{v}$, con $\text{grd } \Psi = 2$. De hecho, la sucesión $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ satisface la siguiente relación

$$(x(s+1) + v_{n,0}) Q_n(s) = q Q_{n+1}^{[1]}(s) + \rho_n Q_n^{[1]}(s), \quad n \geq 0,$$

donde la red, $x(s)$, es q -lineal, i.e. $x(s+1) - qx(s) = \omega$,

$$\rho_n = \frac{q^{n+1} [n+1]}{\kappa \gamma_{n+1}}, \quad n \geq 1, \quad \rho_0 = 0, \\ v_{n,0} = \frac{\gamma_{n+2} \gamma_{n+1}}{q^n [n+2]} \kappa + \rho_n - q \beta_n - \omega, \quad n \geq 0.$$

Aquí κ es una constante, γ_n y β_n son los coeficientes de la RRTT que la sucesión de q -polinomios $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ satisface. De hecho, esta sucesión no es diagonal y será analizada con cuidado en la sección 6.3.7.

El interés de esta contribución consiste en dar, bajo ciertas condiciones, la segunda relación de estructura con la cual se podrá caracterizar una sucesión de q -polinomios semiclásicos a través de la relación

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} B_\nu(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma} \varsigma_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad n \geq \max(t+1, \sigma),$$

donde $\xi_{n,n+\sigma} = \varsigma_{n,n+\sigma} = 1$, $n \geq \max(t+1, \sigma)$, y existe $r \geq \sigma+t+1$ tal que $\xi_{r,r-\sigma} \varsigma_{r,r-t} \neq 0$. Nótese que cuando $\sigma = 0$ se obtiene la segunda relación estructura (6.3).

6.3.2. Preliminares y notación

Sea $\mathbf{u}$ un funcional lineal en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos y sea $\mathbb{P}'$ su espacio dual algebraico. Se denota por $\langle \mathbf{u}, f \rangle$ la acción de $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ sobre $f \in \mathbb{P}$ y por $\mathbf{u}_n := \langle \mathbf{u}, x^n \rangle$, $n \geq 0$, los momentos de $\mathbf{u}$ respecto la sucesión $\{x^n\}_{n \geq 0}$.

A continuación, se van a definir algunos operadores. Para cada polinomio h y cada $c \in \mathbb{C}$, sean $\Delta^{(1)}\mathbf{u}$, $h\mathbf{u}$, y $(x - c)^{-1}\mathbf{u}$ los funcionales lineales definidos sobre $\mathbb{P}$ por (véase [109, 80])

$$(i) \quad \langle \Delta^{(1)}\mathbf{u}, f \rangle := -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)}f \rangle, \quad f \in \mathbb{P},$$

$$(ii) \quad \langle g\mathbf{u}, f \rangle := \langle \mathbf{u}, gf \rangle, \quad f, g \in \mathbb{P},$$

$$(iii) \quad \langle (x - c)^{-1}\mathbf{u}, f \rangle := \langle \mathbf{u}, \theta_c(f) \rangle, \quad f \in \mathbb{P}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \text{donde } \theta_c(f)(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Además, para cualesquiera funcional lineal $\mathbf{u}$ y polinomio g se verifica la siguiente relación

$$L_{q,\omega}(g\mathbf{u}) := \Delta^{(1)}(g\mathbf{u}) = g(q^{-1}(x - \omega))\Delta^{(1)}\mathbf{u} + \Delta^{(1)}(g(q^{-1}(x - \omega)))\mathbf{u}. \quad (6.34)$$

Sea $\{B_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios mónicos (SMP) con $\text{grd } B_n = n$, $n \geq 0$, y $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 0}$ su sucesión dual, i.e. $\mathbf{u}_n \in \mathbb{P}'$, $n \geq 0$, y $\langle \mathbf{u}_n, B_m \rangle := \delta_{n,m}$, $n, m \geq 0$, donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker. Los siguientes dos resultados son bien conocidos: (véase, e.g. [80])

Lema 6.3.1. *Para cualesquiera $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$, y entero $m \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(i) \quad \langle \mathbf{u}, B_{m-1} \rangle \neq 0, \quad \langle \mathbf{u}, B_n \rangle = 0, \quad n \geq m.$$

$$(ii) \quad \text{Existe } \lambda_\nu \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \nu \leq m-1, \quad \lambda_{m-1} \neq 0, \quad \text{tal que } \mathbf{u} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_\nu \mathbf{u}_\nu.$$

Lema 6.3.2. *Para cualesquiera $(\hat{t}, \hat{\sigma}, \hat{r}) \in \mathbb{N}^3$, $\hat{r} \geq \hat{\sigma} + \hat{t} + 1$ y SPOM $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ con $\text{grd } \Omega_n = n$, $n \geq 0$, con sucesión dual $\{\mathbf{w}_n\}_{n \geq 0}$ tal que*

$$\begin{aligned} \Omega_n(x) &= \sum_{\nu=n-\hat{t}}^n \lambda_{n,\nu} B_\nu(x), \quad n \geq \hat{t} + \hat{\sigma} + 1, \quad \lambda_{\hat{r}, \hat{r}-\hat{t}} \neq 0, \\ \Omega_n(x) &= B_n(x), \quad 0 \leq n \leq \hat{t} + \hat{\sigma}, \end{aligned}$$

se tiene que $\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k$ para cada $0 \leq k \leq \hat{\sigma}$.

Si $\{B_n\}_{n \geq 0}$ es una SPOM respecto al funcional lineal quasi-definido $\mathbf{u}$, entonces es sabido (véase [109]) que sus correspondientes sucesiones duales, $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 0}$, son

$$\mathbf{u}_n = r_n^{-1} B_n \mathbf{u}, \quad n \geq 0. \quad (6.35)$$

Nota 6.3.1. *Se asume que $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$, o sea, el funcional lineal $\mathbf{u}$ está normalizado.*

Un ejemplo de funcionales lineales está constituido por los funcionales lineales q -semiclásicos, es decir, cuando $\mathbf{u}$ es quasi-definido y satisface la ecuación distribucional

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}. \quad (6.36)$$

Aquí (Φ, Ψ) es un par admisible de polinomios, i.e., el polinomio Φ es mónico con $\text{grd } \Phi = t$, $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, y si $p = t - 1$, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{[p]!} [\Delta^{(1)}]^p \Psi(0) := \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{[p]!} \overbrace{\Delta^{(1)} \cdots \Delta^{(1)}}^p \Psi(0) \neq -n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $[n]$ es el q -número definido en (6.2), $[0]! = 1$ y $[m]! = [1][2] \cdots [m]$, $m \in \mathbb{N}$, es el q -análogo del factorial usual $m!$.

El par (Φ, Ψ) no es único. De hecho, bajo ciertas condiciones (6.36) puede simplificarse, así se define la clase de $\mathbf{u}$ como el mínimo valor de $\max(\text{grd}(\Phi) - 2, \text{grd}(\Psi) - 1)$, para todos los posibles pares admisibles (Φ, Ψ) . El par (Φ, Ψ) dado por la clase σ ($\sigma \geq 0$ dado que $\text{grd}(\Psi) \geq 1$) es único [80].

Cuando $\mathbf{u}$ es q -semiclásico de clase σ , la correspondiente SPOM se dice q -semiclásica de clase σ . Cuando $\sigma = 0$, i.e., $\text{grd} \Phi \leq 2$ y $\text{grd} \Psi = 1$, entonces $\mathbf{u}$ es q -clásica (q -polinomios grandes de Jacobi, q -polinomios de Charlier, etc). Para más detalles véase [85, 113, 115].

6.3.3. Resultados principales

En primer lugar, se mostrarán algunos casos particulares de sucesiones diagonales.

Sean $\{P_n\}_{n \geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ sucesiones de polinomios mónicos, $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\mathbf{w}_n\}_{n \geq 0}$ sus correspondientes sucesiones duales. Sea ϕ un polinomio mónico de grado t .

Definición 6.3.3. La sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ se dice compatible con ϕ si $\phi \mathbf{v}_n \neq 0$, $n \geq 0$.

Lema 6.3.3. [109, Prop. 2.1] Sea ϕ un polinomio mónico de grado t . Para cualquier sucesión, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, compatible con ϕ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un número entero $\sigma \geq 0$ tal que

$$\phi(x)Q_n(x) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \lambda_{n,\nu} P_\nu(x), \quad n \geq \sigma, \quad (6.37)$$

$$\exists r \geq \sigma : \lambda_{r,r-\sigma} \neq 0. \quad (6.38)$$

(ii) Existen un número entero, $\sigma \geq 0$, y una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} : m \mapsto \mu(m)$ satisfaciendo

$$\max\{0, m - t\} \leq \mu(m) \leq m + \sigma, \quad m \geq 0, \quad (6.39)$$

$$\exists m_0 \geq 0 \quad \text{con} \quad \mu(m_0) = m_0 + \sigma, \quad (6.40)$$

tales que

$$\begin{aligned} \phi \mathbf{v}_m &= \sum_{\nu=m-t}^{\mu(m)} \lambda_{\nu,m} \mathbf{w}_\nu, \quad m \geq t, \\ \lambda_{\mu(m),m} &\neq 0, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Proposición 6.3.1. [109, Prop. 2.2] Si uno asume que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es compatible con ϕ . Entonces las sucesiones, $\{P_n\}_{n \geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, satisfacen las siguientes relaciones finitas (6.37)-(6.38) si y sólo si existen un número entero, $\sigma \geq 0$, y una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} : m \mapsto \mu(m)$ satisfaciendo (6.39) y (6.40). Además, existe $\{k_m\}_{m \geq 0}$ y una sucesión $\{\Lambda_{\mu(m)}\}_{m \geq 0}$ de polinomios mónicos con $\text{grd}(\Lambda_{\mu(m)}) = \mu(m)$, $m \geq 0$, tales que

$$\phi \mathbf{v}_m = k_m \Lambda_{\mu(m)} \mathbf{w}_0, \quad m \geq 0. \quad (6.42)$$

De estos dos resultados se sigue el siguiente resultado:

Corolario 6.3.1. [110, Prop. 1.6] Sea ϕ un polinomio mónico de grado t . Para las SPM, $\{P_n\}_{n \geq 0}$, y $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto a los funcionales lineales $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, respectivamente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un número entero, $\sigma \geq 0$, tal que

$$\phi(s)P_n(s) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \lambda_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad \lambda_{n,n-\sigma} \neq 0, \quad n \geq \sigma.$$

(ii) Existen una sucesión de polinomios mónicos, $\{\Omega_{n+\sigma}\}_{n \geq 0}$, con $\text{grd}(\Omega_{n+\sigma}) = n + \sigma$, $n \geq 0$ y constantes no nulas k_n , $n \geq 0$, tales que

$$\phi \mathbf{u}_n^{[1]} = k_n \Omega_{n+\sigma} \mathbf{v}_0. \quad (6.43)$$

donde $\{\mathbf{u}_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$ es la sucesión dual de $\{B_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$.

Proposición 6.3.2. Cualquier sucesión diagonal, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonal respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ es necesariamente semiclásico y satisface

$$\Delta^{(1)}[\phi(qx + \omega)\Omega_{n+\sigma}\mathbf{u}] = \psi_n \mathbf{u}, \quad n \geq 0, \quad (6.44)$$

donde

$$\psi_n(s) = \frac{\phi(s+1) - \phi(s-1)}{\Delta x(s)} \Omega_{n+\sigma}(s) - d_n \phi(s) \phi(s-1) B_{n+1}(s), \quad (6.45)$$

y

$$d_n = [n+1] \frac{\langle \mathbf{u}, B_{n+\sigma}^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_{n+1}^2 \rangle \lambda_{n+\sigma,n}}, \quad n \geq 0. \quad (6.46)$$

Además, la sucesión $\{\Omega_{n+\sigma}\}_{n \geq 0}$ satisface

$$\begin{aligned} & \Omega_{n+\sigma}(s) \Delta^{(1)} \Omega_\sigma(s) - \Omega_\sigma(s) \Delta^{(1)} \Omega_{n+\sigma}(s) \\ &= \phi(s+1) \{d_n \Omega_\sigma(s) B_{n+1}(s+1) - d_0 \Omega_{n+\sigma}(s) B_1(s+1)\}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Prueba: Sea $\{B_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión diagonal en el sentido de la definición 6.3.2. Si se asume que el funcional lineal $\mathbf{u}$ está normalizado entonces, por el Lema 6.3.1, existen una SPOM, $\{\Omega_{n+\sigma}\}_{n \geq 0}$, y constantes no nulas $\{k_n\}_{n \geq 0}$ tales que

$$\phi \mathbf{u}_n^{[1]} = k_n \Omega_{n+\sigma} \mathbf{u}.$$

Luego

$$\begin{aligned} k_n \Delta^{(1)}[\Omega_{n+\sigma} \mathbf{u}] &= \Delta^{(1)}(\phi(q^{-1}(x - \omega))) \mathbf{u}_n^{[1]} + \phi(q^{-1}(x - \omega)) \Delta^{(1)} \mathbf{u}_n^{[1]} \\ &= \Delta^{(1)}(\phi(q^{-1}(x - \omega))) \mathbf{u}_n^{[1]} - \frac{[n+1]}{\langle \mathbf{u}, B_{n+1}^2 \rangle} \phi(q^{-1}(x - \omega)) B_{n+1}(x) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

y

$$\Delta^{(1)}(\phi(s) \phi(s-1)) = \phi(s) \frac{\phi(s+1) - \phi(s-1)}{\Delta x(s)}. \quad (6.49)$$

Combinando (6.48) y (6.49), se obtiene (6.44), (6.45), y (6.46).

Tomando (6.44) para $n = 0$ y simplificando el factor $\Delta^{(1)}[\phi(qx + \omega)\mathbf{u}]$, por el carácter quasi-definido de $\mathbf{u}$ se obtiene (6.47). $\square$

Corolario 6.3.2. [110, Corollary 2.3] Si $\{B_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión diagonal dada por (6.33), entonces

$$\frac{t}{2} \leq \sigma \leq t + 2. \quad (6.50)$$

Para un funcional lineal semiclásico $\mathbf{u}$, sea (Φ, Ψ) el par admisible minimal (respecto al orden de dichos pares admisibles) donde Φ un polinomio mónico con $\text{grd } \Phi = t$, y $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, y $\sigma := \max(t - 2, p - 1) \geq 0$.

Luego dada una SPM, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto a $\mathbf{u}$, se tiene que

$$\Phi(s)B_n^{[1]}(s) = \sum_{\nu=0}^{n+t} \lambda_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \max(t - 1, 0), \quad (6.51)$$

donde $\lambda_{n,n+t} = 1$ y

$$\begin{aligned} \lambda_{n,\nu} &= r_\nu^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi(s)B_n^{[1]}(s)B_\nu(s) \rangle = \frac{r_\nu^{-1}}{[n+1]} \langle B_\nu \Phi \mathbf{u}, \Delta^{(1)} B_{n+1} \rangle \\ &= -\frac{r_\nu^{-1}}{[n+1]} \langle B_\nu(q^{-1}(x - \omega)) \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] + \Delta^{(1)}(B_\nu(q^{-1}(x - \omega))) \Phi \mathbf{u}, B_{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

para $0 \leq \nu \leq n + t$.

Lema 6.3.4. [80, Prop. 3.2] Para cualesquiera polinomio mónico Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y SPOM, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un número entero no negativo, σ , tal que

$$\Phi(s)B_n^{[1]}(s) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \lambda_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma, \quad (6.52)$$

$$\lambda_{n,n-\sigma} \neq 0, \quad n \geq \sigma + 1. \quad (6.53)$$

(ii) Existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}. \quad (6.54)$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible.

(iii) Existen un número entero no negativo, σ , y un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tales que

$$\Phi(s)\Delta^{(1)}B_n(s-1) + \Psi(s)B_n(s-1) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma(n)} \tilde{\lambda}_{n,\nu} B_{\nu+1}(s), \quad n \geq t, \quad (6.55)$$

$$\tilde{\lambda}_{n,n-t} \neq 0, \quad n \geq t, \quad (6.56)$$

donde $\sigma = \max(p - 1, t - 2)$, el par (Φ, Ψ) es admisible, y

$$\sigma(n) = \begin{cases} p - 1, & n = 0, \\ \sigma, & n \geq 1. \end{cases} \quad (6.57)$$

Además, se puede escribir

$$\tilde{\lambda}_{n,\nu} = -[\nu + 1] \frac{\langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_{\nu+1}^2 \rangle} \lambda_{\nu,n}, \quad 0 \leq \nu \leq n + \sigma. \quad (6.58)$$

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Asumiendo (i), por el Lema 6.3.3 y tomando $P_n = B_n$ y $Q_n = B_n^{[1]}$, se sigue que

$$\Phi \mathbf{u}_m = \sum_{\nu=0}^{\mu(m)} \lambda_{\nu,m} \mathbf{u}_\nu^{[1]}, \quad m \geq 0.$$

Por otro lado, (6.53) implica $\mu(m) = m + \sigma$, $m \geq 1$.

Teniendo en cuenta que

$$\Delta^{(1)} \mathbf{u}_m^{[1]} = -[m+1] \mathbf{u}_{m+1}, \quad m \geq 0, \quad (6.59)$$

se tiene que

$$\Delta^{(1)} [\Phi \mathbf{u}_m] = - \sum_{\nu=0}^{\mu(m)} \lambda_{\nu,m} [\nu+1] \mathbf{u}_{\nu+1}, \quad m \geq 0.$$

En concordancia con la ortogonalidad de $\{B_n\}_{n \geq 0}$, se obtiene

$$\Delta^{(1)} (\Phi B_m \mathbf{u}) = -\Psi_{\mu(m)+1} \mathbf{u}, \quad m \geq 0, \quad (6.60)$$

con

$$\Psi_{\mu(m)+1}(s) = \sum_{\nu=0}^{\mu(m)} \lambda_{\nu,m} [\nu+1] B_{\nu+1}(s), \quad m \geq 0. \quad (6.61)$$

Tomando $m = 0$ en (6.60), se tiene

$$\Delta^{(1)} [\Phi \mathbf{u}] = -\Psi_{\mu(0)+1} \mathbf{u}. \quad (6.62)$$

Si se inserta (6.62) en (6.60) y dado que $\mathbf{u}$ es quasi-definido, se obtiene

$$\Phi(s) \Delta^{(1)} B_m(s-1) - \Psi_{\mu(0)+1}(s) B_m(s-1) = -\Psi_{\mu(m)+1}(s), \quad m \geq 0.$$

Del análisis de los grados en ambos lados resulta que

- Si $t-1 > \mu(0) + 1$, entonces $t \geq 3$, así $t = \sigma + 2$, $\mu(0) < \sigma$.
- Si $t-1 \leq \mu(0) + 1$, entonces $\mu(0) = \sigma$, $t \leq \sigma + 2$.

Nótese que el par $(\Phi, -\Psi_{\mu(0)+1})$ es admisible y poniendo $p = \mu(0) + 1$, se tiene $\sigma = \max(p-1, t-2)$. Así (6.55) y (6.56) son válidos por (6.58).

Así, se tiene probado que (i) $\Rightarrow$ (ii) y (i) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Considérese $m \geq 0$. Entonces

$$\Phi(s) \Delta^{(1)} B_m(s-1) + \Psi(s) B_m(s-1) = \sum_{\nu=0}^{m+\sigma(m)+1} \lambda'_{m,\nu} B_\nu(s),$$

luego

$$\langle \mathbf{u}, (\Phi(s) \Delta^{(1)} B_m(s-1) + \Psi(s) B_m(s-1)) B_\mu \rangle = \lambda'_{m,\mu} \langle \mathbf{u}, B_\mu^2 \rangle, \quad 0 \leq \mu \leq m + \sigma + 1.$$

Ahora bien,

$$\langle \mathbf{u}, (\Phi(s) \Delta^{(1)} B_m(s-1) + \Psi(s) B_m(s-1)) B_\mu \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Phi(s) B_m(s) \Delta^{(1)} B_\mu(s) \rangle, \quad (6.63)$$

así,

$$-\langle \mathbf{u}, \Phi(s) B_m(s) \Delta^{(1)} B_\mu(s) \rangle = \lambda'_{m,\mu} \langle \mathbf{u}, B_\mu^2 \rangle.$$

En consecuencia, $\lambda'_{m,\mu} = 0$, $0 \leq \mu \leq m - t$, $\lambda'_{m,0} = 0$, $m \geq 0$. Además, para $\mu = m - t + 1$, $m \geq t$,

$$-\langle \mathbf{u}, \Phi(s)P_m(s)\Delta^{(1)}P_{m-t+1}(s) \rangle = -[m - t + 1]\langle \mathbf{u}, B_m^2 \rangle = \lambda'_{m,m-t+1}\langle \mathbf{u}, B_{m-t+1}^2 \rangle.$$

Por lo tanto, para $m \geq t$,

$$\Phi(s)\Delta^{(1)}B_m(s-1) + \Psi(s)B_m(s-1) = \sum_{\nu=m-t}^{m+\sigma(m)} \lambda'_{m,\nu+1}B_{\nu+1}(s), \quad \lambda'_{m,m-t+1} \neq 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Por (6.55) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m+\sigma(m)} \tilde{\lambda}_{m,\nu} \delta_{n,\nu+1} &= \langle \mathbf{u}_n, \Phi(s)\Delta^{(1)}B_m(s-1) + \Psi(s)B_m(s-1) \rangle \\ &= -\langle \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}_n] - \Psi\mathbf{u}_n, B_m(s-1) \rangle. \end{aligned}$$

Para $n = 0$, $\langle \Psi\mathbf{u} - \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}], B_m(s-1) \rangle = 0$, $m \geq 0$. Por tanto

$$\Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] = \Psi\mathbf{u}. \quad (6.64)$$

Además, usando (6.63) y la ortogonalidad de $\{B_n\}_{n \geq 0}$, se obtiene

$$\langle \mathbf{u}_n, \Phi(s)\Delta^{(1)}B_m(s-1) + \Psi(s)B_m(s-1) \rangle = -r_n^{-1}\langle \mathbf{u}, \Phi(s)B_m(s)\Delta^{(1)}B_n(s) \rangle.$$

Ahora, haciendo el cambio $n \rightarrow n + 1$, se tiene que

$$\begin{cases} \langle (\Phi\Delta^{(1)}B_{n+1})\mathbf{u}, B_m \rangle = 0, & m \geq n + t + 1, \quad n \geq 0, \\ \langle (\Phi\Delta^{(1)}B_{n+1})\mathbf{u}, B_{n+t} \rangle = -r_{n+1}\tilde{\lambda}_{n+t,n} \neq 0, & n \geq 0. \end{cases}$$

Luego por el Lema 6.3.1 se sigue que

$$(\Phi\Delta^{(1)}B_{n+1})\mathbf{u} = - \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} r_n \tilde{\lambda}_{\nu,n} \mathbf{u}_\nu, \quad n \geq \sigma.$$

La ortogonalidad de $\{B_n\}_{n \geq 0}$ da lugar a

$$(\Phi\Delta^{(1)}B_{n+1})\mathbf{u} = - \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \left(\tilde{\lambda}_{\nu,n} \frac{\langle \mathbf{u}, B_{n+1}^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle} B_\nu \right) \mathbf{u}, \quad n \geq 0.$$

Por (6.64) y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}$ es quasi-definido, se obtiene finalmente (6.52)–(6.53) en consecuencia con (6.58). $\square$

De una manera análoga se puede probar el siguiente resultado:

Lema 6.3.5. [122, Lemma 3.1] Para cualesquiera polinomio Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y SPOM $\{B_n\}_{n \geq 0}$ respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un número entero no negativo, σ , tal que el polinomio B_n satisface

$$\Delta^{(1)}(\Phi(s-1)B_n(s)) = \sum_{\nu=n-\sigma-1}^{n+t-1} \lambda_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma + 1, \quad (6.65)$$

$$\lambda_{n,n-\sigma-1} \neq 0, \quad n \geq t + \sigma + 2. \quad (6.66)$$

(ii) Existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}. \quad (6.67)$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible.

(iii) Existen un número entero no negativo, σ , y un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Phi(s)\Delta^{(1)}B_n(s-1) + \Psi(s)B_n(s-1) - B_n(s)\Delta^{(1)}\Phi(s-1) = \sum_{\nu=n-t+1}^{n+\sigma(n)+1} \tilde{\lambda}_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq t, \quad (6.68)$$

$$\tilde{\lambda}_{n,n-t+1} \neq 0, \quad n \geq t, \quad (6.69)$$

donde $\sigma = \max(p-1, t-2)$ y el par (Φ, Ψ) es admisible. Además, se puede escribir

$$\tilde{\lambda}_{n,\nu} = -\frac{\langle \mathbf{u}, B_m^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle} \lambda_{\nu,n}, \quad 0 \leq \nu \leq n + \sigma(n) + 1, \quad n \geq 0. \quad (6.70)$$

6.3.4. Primera caracterización de los q -polinomios semiclásicos

Teorema 6.2. Dado un polinomio mónico Φ , $\text{grd } \Phi = t$, y una sucesión de polinomios mónicos, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existen números enteros no negativos, $\sigma, p \geq 1, r \geq \sigma + t + 1$, con $\sigma = \max(t-2, p-1)$, tales que

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \alpha_{n,\nu} B_\nu(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+t} v_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad n \geq \max(\sigma, t), \quad (6.71)$$

donde $\alpha_{n,n+t} = v_{n,n+t} = 1, n \geq \max(\sigma, t), \alpha_{r,r-\sigma} v_{r,r-t} \neq 0$,

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_n \rangle = 0, \quad p+1 \leq n \leq \sigma + 2t + 1, \quad \langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_p \rangle \neq 0,$$

y si $p = t-1$, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle \neq -m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u},$$

y el par (Φ, Ψ) es admisible.

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii). Considérese la SMP $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$\begin{aligned} \Omega_{n+t+1}(s) &= \sum_{\nu=n-t}^{n+t} \frac{[n+t+1]}{[\nu+1]} v_{n,\nu} B_{\nu+1}(s), \quad n \geq \sigma + t + 1, \\ \Omega_n(s) &= B_n(s), \quad 0 \leq n \leq \sigma + 2t + 1. \end{aligned}$$

Por (6.71), se tiene que

$$\Delta^{(1)}(\Omega_{n+t+1}(s)) = [n+t+1] \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \alpha_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma + t + 1. \quad (6.72)$$

Dado que $\mathbf{u}$ es quasi-definida, entonces

$$\begin{aligned}\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Omega_{n+t+1} \rangle &= -\langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} \Omega_{n+t+1} \rangle \\ &= -[n+t+1] \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \alpha_{n,\nu} \langle \mathbf{u}, \Phi B_\nu \rangle = 0, \quad n \geq \sigma + t + 1.\end{aligned}$$

Luego,

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Omega_n \rangle = 0, \quad n \geq \sigma + 2t + 1,$$

y por hipótesis

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Omega_n \rangle = 0, \quad p+1 \leq n \leq \sigma + 2t + 1,$$

así

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Omega_n \rangle = 0, \quad n \geq p + 1,$$

y $\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Omega_p \rangle \neq 0$. Por tanto, si se denota por $\{\mathbf{w}_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión dual de $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ y se aplica el Lema 6.3.1, entonces

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \sum_{\nu=1}^p \langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_\nu \rangle \mathbf{w}_\nu. \quad (6.73)$$

Por otro lado, si se toma $\hat{t} = 2t$, $\hat{\sigma} = \sigma + 1$, y $\hat{r} = r + t + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Omega_n(s) &= \sum_{\nu=n-\hat{t}}^n \tilde{v}_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \hat{\sigma} + \hat{t} + 1, \\ \Omega_n(s) &= B_n(s), \quad 0 \leq n \leq \hat{\sigma} + \hat{t},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{n,\nu} &= \frac{[n]}{[\nu]} v_{n-t-1,\nu-1}, \quad n - \hat{t} \leq \nu \leq n, \quad n \geq \hat{\sigma} + \hat{t} + 1, \\ \tilde{v}_{\hat{r},\hat{r}-\hat{t}} &= \frac{[r+t+1]}{[r-t+1]} v_{r,r-t} \neq 0, \quad \hat{r} \geq \sigma + 2t + 2 = \hat{\sigma} + \hat{t} + 1.\end{aligned}$$

Del Lema 6.3.2 y (6.35), se sigue que $w_k = u_k = \langle \mathbf{u}, B_k^2 \rangle^{-1} B_k$, $0 \leq k \leq \hat{\sigma} = \sigma + 1$. Así, la relación (6.73) se transforma en

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u},$$

donde

$$\Psi(s) = - \sum_{\nu=1}^p \langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_\nu \rangle B_\nu(s),$$

con $\text{grd } \Psi = p$, así como $\langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle \neq 0$ y, en consecuencia, el par (Φ, Ψ) es admisible de orden σ .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por el Lema 6.3.5 (i) y haciendo $n \rightarrow n + 1$ se tiene

$$\Delta^{(1)}(\Phi(s-1)B_{n+1}(s)) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \lambda_{n+1,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma, \quad (6.74)$$

donde $\lambda_{n+1,n+t} = [n+t+1]$, $n \geq \sigma$, y $\lambda_{n+1,n-\sigma} \neq 0$, $n \geq t + \sigma + 1$.

Por otro lado, la ortogonalidad de $\{B_n\}_{n \geq 0}$ da lugar a

$$\Phi(s-1)B_{n+1}(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+t} \frac{\langle \mathbf{u}, \Phi(s-1)B_{n+1}(s)B_{\nu+1}(s) \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_{\nu+1}^2 \rangle} B_{\nu+1}(s), \quad n \geq t-1.$$

Por tanto,

$$\Delta^{(1)}(\Phi(s-1)B_{n+1}(s)) = \sum_{\nu=n-t}^{n+t} \frac{[\nu+1]\langle \mathbf{u}, \Phi(s-1)B_{n+1}(s)B_{\nu+1}(s) \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_{\nu+1}^2 \rangle} B_{\nu}^{[1]}(s), \quad n \geq t. \quad (6.75)$$

De (6.74) y (6.75), se obtiene (6.71) con

$$\begin{aligned} \alpha_{n,\nu} &= \frac{\lambda_{n+1,\nu}}{[n+t+1]}, \quad n-\sigma \leq \nu \leq n+t, \\ v_{n,\nu} &= \frac{[\nu+1]\langle \mathbf{u}, \Phi(s-1)B_{n+1}(s)B_{\nu+1}(s) \rangle}{[n+t+1]\langle \mathbf{u}, B_{\nu+1}^2 \rangle}, \quad n-t \leq \nu \leq n+t, \\ \alpha_{n,n-\sigma}v_{n,n-t} &\neq 0, \quad n \geq \sigma+t+1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_n \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_n \rangle = \begin{cases} 0, & p+1 \leq n \leq \sigma+2t+1, \\ \frac{1}{[p]!} [\Delta^{(1)}]^p \Psi(0) \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle, & n=p=\text{grd } \Psi, \end{cases}$$

y si $p=t-1$, la q -admisibilidad de (Φ, Ψ) da lugar a $\lim_{q \rightarrow 1} \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$. $\square$

En el caso de funcionales lineales q -clásicos, se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 6.3.3. Sean $\{B_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM respecto a $\mathbf{u}$, y Φ un polinomio mónico, con $\text{grd } \Phi = t \leq 2$, tales que $\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle \neq 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) El funcional lineal $\mathbf{u}$ es q -clásico, i.e. existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}.$$

(ii)

$$\sum_{\nu=n}^{n+t} \alpha_{n,\nu} B_{\nu}(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+t} v_{n,\nu} B_{\nu}^{[1]}(s), \quad n \geq t.$$

Además, existe un número entero $r \geq t+1$ tal que $\alpha_{r,r}v_{r,r-t} \neq 0$, y si $t=2$ entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \mathbf{u}, B_1^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \rangle \neq -m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

6.3.5. Segunda caracterización de los q -polinomios semiclásicos

Es claro que con la caracterización establecida en el Teorema 6.2 de la sección anterior no se puede recuperar la segunda relación de estructura asociada a los q -polinomios (6.3) ya que $t \geq 1$. A continuación se establecerá una caracterización que permita deducir dicha relación de estructura la cual no sólo será válida para las familias de q -polinomios clásicos de la tabla de Hahn, sino también para los q -polinomios semiclásicos. En primer lugar, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.3.3. Para cualesquiera polinomio mónico Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y SPOM, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un polinomio Ψ , $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}, \quad (6.76)$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible.

(ii) Existen un número entero negativo, σ , y un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tales que para $n \geq \sigma$

$$\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_n(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_n(s-1)) - B_n(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma(n)} \vartheta_{n,\nu} B_\nu(s), \quad (6.77)$$

donde $\vartheta_{n,n-\sigma} \neq 0$, $n \geq \sigma + t + 1$, o $n = \sigma + t$ y $p \geq t - 1$, $\sigma = \max(t - 2, p - 1)$, y el par (Φ, Ψ) es admisible. Además, se puede escribir

$$\vartheta_{n,\nu} = \frac{\langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle} \vartheta_{\nu,n}, \quad 0 \leq \nu \leq n + \sigma(n), \quad n \geq 0. \quad (6.78)$$

Prueba: Se tiene para $n \geq 0$ que

$$\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_n(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_n(s-1)) - B_n(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1) = \sum_{\nu=0}^{n+\sigma(n)} \vartheta_{n,\nu} B_\nu(s), \quad (6.79)$$

donde para todo número entero μ , con $0 \leq \nu \leq n + \sigma(n)$, y $n \geq 0$,

$$\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle \vartheta_{n,\nu} = \langle \mathbf{u}, (\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_n(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_n(s-1)) - B_n(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1)) B_\nu \rangle.$$

Teniendo en cuenta (6.35) y (6.77), se obtiene que

$$\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle \vartheta_{n,\nu} = \langle \mathbf{u}, (\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_\nu(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_\nu(s-1)) - B_\nu(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1)) B_n \rangle.$$

Y aplicando (6.79), se tiene que

$$\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle \vartheta_{n,\nu} = \sum_{i=0}^{\nu+\sigma(\nu)} \vartheta_{\nu,i} \langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle \delta_{i,n} = \vartheta_{\nu,n} \langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle.$$

En particular, si $0 \leq \nu \leq n - \sigma - 1$, entonces $n \geq \nu + \sigma + 1 \geq \nu + \sigma(\nu) + 1$. Así, se deduce que $\vartheta_{\nu,n} = 0$. Por lo tanto

$$\vartheta_{n,\nu} = 0, \quad 0 \leq \nu \leq n - \sigma - 1.$$

Para $\nu = n - \sigma$ y $n \geq \sigma + t$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, B_{n-\sigma}^2 \rangle \vartheta_{n,n-\sigma} &= \langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)}(\Phi(s)\Delta^{(1)}B_{n-\sigma}(s-1) + \Psi(s)B_{n-\sigma}(s-1)) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)}(B_{n-\sigma}(s)\Delta^{(1)}\Phi(s-1))B_n \rangle = \sum_{n=0}^{n+1} \tilde{\lambda}_{n-\sigma,\nu} \langle \mathbf{u}, B_n \Delta^{(1)} B_\nu \rangle \\ &= [n+1] \tilde{\lambda}_{n-\sigma,n+1} \langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle. \end{aligned}$$

Pero, por (6.69), se sigue que $\vartheta_{n,n-\sigma} \neq 0$, con $n \geq \sigma + t + 1$, ó $n = \sigma + t$ y $p \geq t - 1$.

En consecuencia,

$$\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_n(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_n(s-1)) - B_n(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma(n)} \vartheta_{n,\nu} B_\nu(s),$$

donde $n \geq \sigma$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por (6.77)

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{(1)}(\Phi(s-1)\Delta^{(1)}\mathbf{u}) + ((\Delta^{(1)}\Phi(s-1)) - \Psi(s))\Delta^{(1)}\mathbf{u}, B_n(s-1) \rangle &= 0, \quad n \geq \sigma + 1, \\ \langle \Delta^{(1)}(\Phi(s-1)\Delta^{(1)}\mathbf{u}) + ((\Delta^{(1)}\Phi(s-1)) - \Psi(s))\Delta^{(1)}\mathbf{u}, B_n(s-1) \rangle &= \langle \mathbf{u}, 1 \rangle \vartheta_{n,0}, \quad n \leq \sigma. \end{aligned}$$

Según el Lema 6.3.1

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}[\Phi(s-1)\Delta^{(1)}\mathbf{u}] + ((\Delta^{(1)}\Phi(s-1)) - \Psi(s))\Delta^{(1)}\mathbf{u} &= \sum_{n=0}^{\sigma} \frac{\langle \mathbf{u}, 1 \rangle \vartheta_{n,0}}{\langle \mathbf{u}, B_n^2 \rangle} B_n(\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}) \\ &= \sum_{n=0}^{\sigma(0)} \vartheta_{0,n} B_n(\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Por último, un cálculo directo conduce a

$$\Delta^{(1)}[\Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] - \Psi\mathbf{u}] = 0.$$

Luego si P es un polinomio arbitrario de grado $m \geq 0$, se sabe que existe otro polinomio Q de grado $m+1$ tal que $\Delta^{(1)}Q(s) = P(s)$, luego

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] - \Psi\mathbf{u}, P \rangle = \langle \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] - \Psi\mathbf{u}, \Delta^{(1)}Q \rangle = -\langle \Delta^{(1)}[\Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] - \Psi\mathbf{u}], Q \rangle = \langle 0, Q \rangle = 0.$$

De ahí que $\Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}] - \Psi\mathbf{u} = 0$.

Además, dado que $\sigma(n) = \sigma$ y

$$\vartheta_{n,n+\sigma} = [n + \sigma + 1] \tilde{\lambda}_{n,n+\sigma+1} \neq 0, \quad n \geq t + 1,$$

entonces

$$\tilde{\lambda}_{n,n+\sigma+1} \neq 0, \quad n \geq t + 1.$$

La q -admisibilidad del par (Φ, Ψ) se sigue, teniendo en cuenta el valor de $\tilde{\lambda}_{n+\sigma(n)+1}$. $\square$

Con toda la información y resultados obtenidos hasta el momento, se puede enunciar el principal resultado de este apartado.

Teorema 6.3. *Para cualesquiera polinomio Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y sucesión de polinomios mónicos, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existen números enteros no negativos, $\sigma, p \geq 1, r \geq \sigma + t + 1$, con $\sigma = \max(t-2, p-1)$, tales que*

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} B_\nu(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma} \varsigma_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad (6.80)$$

donde $B_n^{[1]}(s) = [n+1]^{-1} \Delta^{(1)} B_{n+1}(s)$, $\xi_{n,n+\sigma} = \varsigma_{n,n+\sigma} = 1$, $n \geq \max(\sigma, t+1)$, $\xi_{r,r-\sigma} \varsigma_{r,r-t} \neq 0$,

$$\begin{cases} \langle \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}], B_m \rangle = 0, & p+1 \leq m \leq 2\sigma + t + 1, \\ \langle \Delta^{(1)}[\Phi\mathbf{u}], B_p \rangle \neq 0, \end{cases}$$

y si $p = t-1$, entonces se satisface la condición de q -admisibilidad:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle \neq m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}, \quad (6.81)$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible.

Prueba: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea la sucesión de polinomios mónicos, $\{\Xi_n\}_{n \geq 0}$, dados por

$$\begin{aligned} \Xi_{n+\sigma+1}(x) &= \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma} \frac{[n+\sigma+1]}{[\nu+1]} \varsigma_{n,\nu} B_{\nu+1}(x), \quad n \geq \sigma+t+1, \\ \Xi_n(x) &= B_n(x), \quad 0 \leq n \leq 2\sigma+t+1. \end{aligned}$$

Un cálculo directo conduce a

$$\Delta^{(1)}\Xi_{n+\sigma+1}(s) = [n+\sigma+1] \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq \sigma+t+1.$$

Tendiendo en cuenta que el funcional lineal $\mathbf{u}$ es quasi-definido, se obtiene

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], \Xi_{n+\sigma+1} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)}\Xi_{n+\sigma+1}(s) \rangle = -[n+\sigma+1] \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} \langle \mathbf{u}, \Phi B_\nu \rangle = 0,$$

donde $n \geq \sigma+t+1$.

Por hipótesis y el Lema 6.3.1, si se denota por $\{\mathbf{w}_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión dual de $\{\Xi_n\}_{n \geq 0}$, se obtiene

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \sum_{\nu=0}^p \langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_\nu \rangle \mathbf{w}_\nu. \quad (6.82)$$

Tomando $\hat{t} = \sigma+t$, $\hat{\sigma} = \sigma+1$, y $\hat{r} = r+\sigma+1$, los polinomios Ξ_n pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \Xi_n(x) &= \sum_{\nu=n-\hat{t}}^n \tilde{\varsigma}_{n,\nu} B_\nu(x), \quad n \geq \hat{\sigma} + \hat{t} + 1, \\ \Xi_n(x) &= B_n(x), \quad 0 \leq n \leq \hat{\sigma} + \hat{t}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\varsigma}_{n,\nu} &= \frac{[n]}{[\nu]} \varsigma_{n-\sigma-1,\nu-1}, \quad n - \hat{t} \leq \nu \leq n, \quad n \geq \sigma + \hat{t} + 1, \\ \tilde{\varsigma}_{\hat{r},\hat{r}-\hat{t}} &= \frac{[r+\sigma+1]}{[r-t+1]} \varsigma_{r,r-t} \neq 0, \quad \hat{r} \geq 2\sigma+t+2 \geq \hat{\sigma} + \hat{t} + 1. \end{aligned}$$

Pero, por el Lemma 6.3.2,

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{u}_k = \langle \mathbf{u}, B_k^2 \rangle^{-1} B_k \mathbf{u}, \quad 0 \leq k \leq \hat{\sigma} = \sigma+1.$$

Así, (6.82) da lugar a

$$\Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}] = \sum_{\nu=1}^p \left(\frac{\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_\nu \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_\nu^2 \rangle} B_\nu \right) \mathbf{u} = \Psi \mathbf{u}.$$

Dado que $\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_p \rangle \neq 0$, entonces $\text{grd } \Psi = p$. Por hipótesis, si $p = t-1$, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{[p]!} [\Delta^{(1)}]^p \Psi(0) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_p \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle} = - \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle}{\langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle} \neq -m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Por tanto, el par (Φ, Ψ) es admisible de orden σ .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por el Lema 6.3.4(iii), existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Phi(s-1)\Delta^{(1)}B_n(s-1) + \Psi(s)B_n(s-1) - B_n(s)\Delta^{(1)}\Phi(s-1) = \sum_{\nu=n-t+1}^{n+\sigma(n)+1} \tilde{\lambda}_{n,\nu} B_\nu(s), \quad n \geq t, \quad (6.83)$$

donde $\tilde{\lambda}_{n,n-t+1} \neq 0$, $n \geq t$, $\sigma = \max(t-2, p-1)$, y el par (Φ, Ψ) es admisible.

Tomando q -diferencias en ambos lados de (6.83) se obtiene, para $n \geq t$, que

$$\Phi(s)[\Delta^{(1)}]^2 B_n(s-1) + \Delta^{(1)}(\Psi(s)B_n(s-1)) - B_n(s)[\Delta^{(1)}]^2 \Phi(s-1) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma(n)} \zeta_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad (6.84)$$

donde $\zeta_{n,\nu} = [\nu+1]\tilde{\lambda}_{n,\nu+1}$, $0 \leq \nu \leq n + \sigma(n)$, $n \geq t$. De (6.77) y (6.84), se obtiene (6.80), donde

$$\begin{aligned} \xi_{n,\nu} &= \frac{\vartheta_{n,\nu}}{\vartheta_{n,n+\sigma}}, \quad n - \sigma \leq \nu \leq n + \sigma, \\ \varsigma_{n,\nu} &= \frac{[\nu+1]\tilde{\lambda}_{n,\nu+1}}{\vartheta_{n,n+\sigma}}, \quad n - t \leq \nu \leq n + t, \\ \xi_{n,n-\sigma}\varsigma_{n,n-t} &= \frac{[n-t+1]}{\vartheta_{n,n+\sigma}^2} \vartheta_{n,n-\sigma} \tilde{\lambda}_{n,n-t+1} \neq 0, \quad n \geq \sigma + t + 1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\langle \Delta^{(1)}[\Phi \mathbf{u}], B_n \rangle = \langle \mathbf{u}, \Psi B_n \rangle = \begin{cases} 0, & p+1 \leq n \leq 2\sigma + t + 1, \\ \frac{\langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle}{[p]!} [\Delta^{(1)}]^p \Psi(0) \neq 0, & n = p = \text{grd } \Psi. \end{cases}$$

Por la propiedad de admisibilidad del par (Φ, Ψ) , si $p = t-1$, entonces

$$\langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta^{(1)} B_p \rangle \neq m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

□

6.3.6. La red uniforme $x(s) = s$

Una consecuencia directa de estos resultados es que partir del operador $L_{q,\omega}$ y la red q -lineal $x(s)$, se pueden recuperar los polinomios Δ -semiclásicos – los cuales son ortogonales sobre una red uniforme – considerando

$$x(s) = \frac{q^s - 1}{q - 1},$$

y tomando $q \rightarrow 1$. Para los polinomios Δ -clásicos las relaciones de estructura (6.1) y (6.3) han sido estudiadas en [64].

Teorema 6.4. Primera caracterización para los polinomios Δ -semiclásicos

Para cualesquiera polinomio Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y sucesión de polinomios mónicos, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existen números enteros no negativos, $\sigma, p \geq 1, r \geq \sigma + t + 1$, con $\sigma = \max(t-2, p-1)$, tales que

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \alpha_{n,\nu} B_\nu(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+t} v_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad n \geq \max(\sigma, t), \quad (6.85)$$

donde

$$B_n^{[1]}(s) := (n+1)^{-1} \Delta B_{n+1}(s),$$

$$\alpha_{n,n+t} = v_{n,n+t} = 1, n \geq \max(\sigma, t), \alpha_{r,r-\sigma} v_{r,r-t} \neq 0,$$

$$\langle \Delta[\Phi \mathbf{u}], B_n \rangle = 0, p+1 \leq n \leq \sigma + 2t + 1, \quad \langle \Delta[\Phi \mathbf{u}], B_p \rangle \neq 0,$$

$$\text{y si } p = t - 1, \text{ entonces } \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta B_p \rangle \neq -m, m \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Existe un polinomio Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u},$$

y el par (Φ, Ψ) es admisible.

Teorema 6.5. Segunda caracterización para los polinomios Δ -semiclásicos Para cualesquiera polinomio mónico Φ , con $\text{grd } \Phi = t$, y sucesión de polinomios mónicos, $\{B_n\}_{n \geq 0}$, ortogonales respecto al funcional $\mathbf{u}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existen números enteros no negativos, $\sigma, p \geq 1, r \geq \sigma + t + 1$, con $\sigma = \max(t - 2, p - 1)$, tales que

$$\sum_{\nu=n-\sigma}^{n+\sigma} \xi_{n,\nu} B_\nu(s) = \sum_{\nu=n-t}^{n+\sigma} \varsigma_{n,\nu} B_\nu^{[1]}(s), \quad (6.86)$$

$$\text{donde } \xi_{n,n+\sigma} = \varsigma_{n,n+\sigma} = 1, n \geq \max(\sigma, t+1), \xi_{r,r-\sigma} \varsigma_{r,r-t} \neq 0,$$

$$\begin{cases} \langle \Delta[\Phi \mathbf{u}], B_m \rangle = 0, & p+1 \leq m \leq 2\sigma + t + 1, \\ \langle \Delta[\Phi \mathbf{u}], B_p \rangle \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{y si } p = t - 1, \text{ entonces } \langle \mathbf{u}, B_p^2 \rangle^{-1} \langle \mathbf{u}, \Phi \Delta B_p \rangle \neq m, m \in \mathbb{N}_0 \text{ (condición de admisibilidad).}$$

(ii) Existe un polinomio mónico Ψ , con $\text{grd } \Psi = p \geq 1$, tal que

$$\Delta[\Phi \mathbf{u}] = \Psi \mathbf{u}, \quad (6.87)$$

donde el par (Φ, Ψ) es admisible.

La prueba es análoga a la original considerando $\omega = 1$ y tomando límite cuando $q \rightarrow 1$. Por tanto, $L_{q,1} \equiv \Delta^{(1)}$ y $[n]$ se transforman en Δ y n , respectivamente.

Nota 6.3.2. Los funcionales lineales Δ -semiclásicos han sido estudiados en [104].

6.3.7. Ejemplos

□ Ejemplo 1

Sea $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM que satisface la relación

$$(x(s+1) + v_{n,0})Q_n(s) = qQ_{n+1}^{[1]}(s) + \rho_n(s)Q_n^{[1]}(s), \quad (6.88)$$

donde la red $x(s)$ es q -lineal, i.e. $x(s+1) - qx(s) = \omega$,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 0, \\ \rho_n &= \frac{q^{n+1} [n+1]}{\kappa \gamma_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ v_{n,0} &= \frac{\gamma_{n+2} \gamma_{n+1}}{q^n [n+2]} \kappa + \rho_n - q\beta_n - \omega, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

y κ es una constante, siendo $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ los coeficientes de la RRTT

$$xQ_n = Q_{n+1} + \beta_n Q_n + \gamma_n Q_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Entonces, por la anterior RRTT y el Teorema 6.2, se obtiene que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de q -polinomios semiclásicos respecto al funcional lineal $\mathbf{v}$, el cual es solución de la ecuación de Pearson

$$\Delta^{(1)} \mathbf{v} = \Psi \mathbf{v}, \quad (6.89)$$

de clase $\sigma = 1$, con $\Phi(x) = 1$ y $\text{grd } \Psi = 2$.

Entonces, también satisface la siguiente relación:

$$Q_n^{[1]}(s) = Q_n(s) + \lambda_{n,n-1} Q_{n-1}(s), \quad (6.90)$$

donde $\lambda_{n,n-1} = \frac{\gamma_{n+1}\gamma_n}{q^n[n+1]}\kappa$.

De hecho, se tiene que

$$\Psi(x) = -\frac{\kappa}{q} Q_2(x) - \frac{1}{\gamma_1} Q_1(x).$$

Lema 6.3.6. Sea $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM respecto al funcional lineal v satisfaciendo (6.89). Entonces la sucesión $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ no es diagonal.

Prueba: Se asume que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es diagonal respecto a ϕ , con $\text{grd } \phi = t$, de índice σ . Entonces, por el Corolario 6.3.2,

$$\frac{t}{2} \leq \sigma \leq t + 2,$$

y se tiene la siguiente relación diagonal

$$\phi(s)Q_n(s) = \sum_{\nu=n-\sigma}^{n+t} \theta_{n,\nu} Q_\nu^{[1]}(s), \quad \theta_{n,n-\sigma} \neq 0, \quad n \geq \sigma.$$

Si se denota por $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\mathbf{v}_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$ las sucesiones duales de $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ y $\{Q_n^{[1]}\}_{n \geq 0}$, respectivamente, entonces, por la Proposición 6.3.1, la última relación es equivalente a

$$\phi \mathbf{v}_n^{[1]} = k_n \Omega_{n+\sigma} \mathbf{v}, \quad n \geq 0, \quad (6.91)$$

donde $k_n = \langle \mathbf{v}, Q_{n+\sigma}^2 \rangle^{-1} \theta_{n+\sigma, n}$, y

$$\Omega_{n+\sigma}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+\sigma} \frac{\theta_{\nu,n}}{\theta_{n+\sigma,n}} \frac{\langle \mathbf{v}, Q_{n+\sigma}^2 \rangle}{\langle \mathbf{v}, Q_\nu^2 \rangle} Q_\nu(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Es claro que $\mathbf{v}$ satisface un número infinito de relaciones del tipo (6.91). De hecho, multiplicando ambas partes de (6.91) por un polinomio mónico, se obtiene otra relación diagonal.

Debido a esto, se asumirá que $t = \text{grd } \phi$ es el mínimo número entero no negativo tal que $\mathbf{v}$ satisface la relación diagonal (6.91), i.e. la ecuación (6.91) no puede simplificarse.

Nótese que $t \geq 1$. De hecho, si se supone que $t = 0$, entonces $0 \leq \sigma \leq 2$ y se recupera la primera relación estructura que caracteriza las sucesiones q -clásicas lo cual contradice el hecho que la sucesión $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es q -semiclásica de clase uno.

En consecuencia, dado que $t \geq 1$ entonces $\sigma \geq 1$. Tomando q -diferencias en ambos lados de (6.91) y usando (6.35), (6.89) y $\Delta^{(1)} \mathbf{v}_n^{[1]} = -[n+1] \mathbf{v}_{n+1}$, se obtiene

$$\tilde{\phi} \mathbf{v}_n^{[1]} = k_n \psi_n \mathbf{v}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.92)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(s) &= [t]^{-1} \Delta^{(1)} \phi(s), \\ \psi_n(s) &= [t]^{-1} (\Omega_{n+\sigma}(s+1) \Psi(s) + \Delta^{(1)} \Omega_{n+\sigma}(s) + d_n \phi(s+1) Q_{n+1}(s)), \quad n = 0, 1, \dots, \\ d_n &= [n+1] (\langle \mathbf{v}, Q_{n+1}^2 \rangle k_n)^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Nótese que el polinomio $\tilde{\phi}$ es mónico con $\text{grd } \tilde{\phi} = t - 1$.

Además, teniendo en cuenta que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal quasi-definido, combinando (6.91) y (6.92) se obtiene

$$\tilde{\phi}(x) \Omega_{n+\sigma}(x) = \phi(x) \psi_n(x).$$

Del análisis de las potencias de mayor orden en esta última relación se deduce que ψ_n es un polinomio mónico con $\text{grd } \psi_n = n + \sigma - 1$. Pero esto contradice el hecho que $t = \text{grd } \phi$ es el mínimo número entero no negativo tal que v satisface la relación diagonal (6.91). $\square$

$\square$ Ejemplo 2: Los q -polinomios tipo Freud

Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u}, 1 \rangle = 1$ la cual satisface la relación:

$$\Delta^{(1)} P_n(s) = [n] P_{n-1}(s) + a_n P_{n-3}(s), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (6.93)$$

donde $P_{-1} \equiv 0$, $P_0 \equiv 1$, y $P_1(x) = x$, siendo $x \equiv x(s) = q^s$, i.e. $\omega = 0$.

Dado que dicha familia es ortogonal respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$, entonces dicha familia satisface una RRTT, es decir, existen sucesiones de números complejos, $\{b_n\}_{n \geq 0}$, y $\{c_n\}_{n \geq 0}$, $c_n \neq 0$, tales que

$$x P_n = P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.94)$$

Si se le aplica el operador $\Delta^{(1)}$ a la relación (6.94) y se tiene en cuenta (6.93) se obtienen las siguientes relaciones igualando las potencias de x

$$\begin{aligned}q b_{n-1} &= b_n, & q[n] c_{n-1} + q a_n &= a_{n+1} + [n-1] c_n, \\ q a_n b_{n-3} &= a_n b_n, & q a_n c_{n-3} &= a_{n-1} c_n.\end{aligned}$$

Luego, dado que $c_n \neq 0$ se deduce que $a_n \neq 0$, por tanto de la combinación de las expresiones anteriores se sigue que $b_n = 0$ para $n \geq 0$ ya que $|q| \neq 1$. Además de la relación $q a_n c_{n-3} = a_{n-1} c_n$ se obtiene que $a_n = K(q) q^{-n} c_n c_{n-1} c_{n-2}$, $n \geq 2$, donde $K(q)$ es cierta constante. Luego los parámetros c_n satisfacen la relación no lineal

$$q[n] c_{n-1} + K(q) q^{-n+1} c_n c_{n-1} c_{n-2} = [n-1] c_n + K(q) q^{-n-1} c_{n+1} c_n c_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.95)$$

donde $c_0 = 0$, $c_1 = -P_2(0) \neq 0$.

Por otro lado, dado que se satisface la relación (6.93), tomando $\Phi \equiv 1$, $t = 0$ y $\sigma = 2$ en la Proposición 6.3.4 se deduce que existe un polinomio mónico, Ψ , de grado 3, tal que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal q -semiclásico de clase 2, i.e. $\mathbf{u}$ satisface la ecuación distribucional

$$\Delta^{(1)} \mathbf{u} = \Psi \mathbf{u}, \quad \text{grd } \Psi = 3. \quad (6.96)$$

De hecho, se tiene que

Lema 6.3.7. $\Psi(x) = -K(q) q^{-3} P_3(x) - c_1^{-1} P_1(x)$.

Prueba: Dado que Ψ es un polinomio mónico de grado 3, este puede escribirse como $\Psi(x) = e_0 P_0 + e_1 P_1 + e_2 P_2 + e_3 P_3$. Además, dado que $d_n^2 = c_n d_{n-1}^2$ para $n \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} e_0 d_0^2 &= e_0 \langle \mathbf{u}, P_0^2 \rangle = \langle \Psi \mathbf{u}, P_0 \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)} P_0 \rangle = 0, \\ e_1 d_1^2 &= e_1 \langle \mathbf{u}, P_1^2 \rangle = \langle \Psi \mathbf{u}, P_1 \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)} P_1 \rangle = -1, \\ e_2 d_2^2 &= e_2 \langle \mathbf{u}, P_2^2 \rangle = \langle \Psi \mathbf{u}, P_2 \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)} P_2 \rangle \stackrel{(6.93)}{=} -\langle \mathbf{u}, [2] P_1 \rangle = 0, \\ e_3 d_3^2 &= e_3 \langle \mathbf{u}, P_3^2 \rangle = \langle \Psi \mathbf{u}, P_3 \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)} P_3 \rangle \stackrel{(6.93)}{=} -\langle \mathbf{u}, [3] P_2 + a_3 P_0 \rangle = -a_3. \end{aligned}$$

□

Así, (6.96) es un q -análogo de la ecuación de Pearson para el caso Freud. De hecho, tomando convenientemente c_1 , y haciendo tender $q \rightarrow 1$, la ecuación distribucional (6.96) se transforma en $(\omega(x))' = -4x^3 \omega(x)$ y la relación (6.93) se transforma en $P'_n(x) = n P_{n-1} + a_n P_{n-2}$ de ahí que tomando dicho límite en la relación (6.95) se deduce que $\lim_{q \rightarrow 1} K(q) = 4$ (véase [54, 33]).

Por otro lado, el Teorema 6.3 asegura que la segunda fórmula de estructura puede escribirse como

$$B_{n+2} + \xi_{n,n+1} B_{n+1} + \xi_{n,n} B_n + \xi_{n,n-1} B_{n-1} + \xi_{n,n-2} B_{n-2} = B_{n+2}^{[1]} + \varsigma_{n,n+1} B_{n+1}^{[1]} + \varsigma_{n,n} B_n^{[1]}. \quad (6.97)$$

Luego, usando (6.93) se obtiene que

$$\begin{aligned} \xi_{n,n+1} &= \varsigma_{n,n+1}, & \xi_{n,n} &= \frac{a_{n+3}}{[n+3]} + \varsigma_{n,n}, \\ \xi_{n,n-1} &= \frac{\varsigma_{n,n+1}}{[n+2]} a_{n+2}, & \xi_{n,n-2} &= \frac{\varsigma_{n,n}}{[n+1]} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto si

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} x^{n-j},$$

combinando las relaciones (6.93) y (6.97) se tiene que $\lambda_{n,2k+1} = 0$ para los enteros no negativos n, k tales que $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, y

$$\lambda_{n,0} = 1, \quad \lambda_{n,2k+2} = \frac{[n]c_{n-1}\lambda_{n-2,2k} + a_n\lambda_{n-3,2k}}{[n-2k-2] - [n]}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

De hecho, con estos valores, se obtiene que $c_n = \lambda_{n,2} - \lambda_{n+1,2}$, $b_n = \lambda_{n,1} - \lambda_{n+1,1} = 0$, y $\xi_{n,n+1} = \xi_{n,n-1} = \varsigma_{n,n+1} = 0$, $n \geq 0$. Por tanto, se puede escribir (6.97) como

$$(x^2 + \tilde{v}_{n,0})B_n = B_{n+2}^{[1]} + \tilde{\rho}_n B_n^{[1]}, \quad (6.98)$$

donde $\tilde{v}_{n,0} = \frac{a_{n+3}}{[n+3]} + \frac{q^{n+1}[n+1]}{K(q)c_{n+1}} - c_{n+1} - c_n$, y $\tilde{\rho}_n = \frac{q^{n+1}[n+1]}{K(q)c_{n+1}}$.

Por último, se dará la relación de recurrencia que satisfacen los momentos del funcional $\mathbf{u}$.

Lema 6.3.8. *Los momentos del funcional lineal $\mathbf{u}$, $\{(\mathbf{u})_n\}_{n \geq 0}$, satisfacen la relación*

$$[n](\mathbf{u})_{n-1} = K(q)q^{-3}(\mathbf{u})_{n+3} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{[3]c_2 + a_3}{q^4(1+q)} K(q) \right) (\mathbf{u})_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.99)$$

donde $(\mathbf{u})_0 = 1$.

Teniendo en cuenta que $(\mathbf{u})_1 = \mathbf{u}_3 = 0$, se tiene que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal simétrico, i.e. $(\mathbf{u})_{2n+1} = \langle \mathbf{u}, x^{2n+1} \rangle = 0$, $n \geq 0$, lo cual confirma el hecho que es un q -análogo al caso tipo Freud descrito anteriormente.

Prueba: Dado que $\Delta^{(1)}\mathbf{u} = \Psi\mathbf{u}$, entonces

$$\langle \Delta^{(1)}\mathbf{u}, x^n \rangle = \langle \Psi\mathbf{u}, x^n \rangle.$$

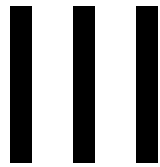
Luego teniendo en cuenta que $\langle \Delta^{(1)}\mathbf{u}, p \rangle = -\langle \mathbf{u}, \Delta^{(1)}p \rangle$, donde $p \in \mathbb{P}$, y el lema 6.3.7 se tiene que

$$-[n](\mathbf{u})_{n-1} = -K(q)q^{-3}\langle \mathbf{u}, P_3x^n \rangle - c_1^{-1}(\mathbf{u})_{n+1}. \quad (6.100)$$

Aplicando la RRTT (6.94) para $n = 2$, se obtiene que $P_3(x) = x^3 - (c_1 + c_2)x$ y dado que $c_2 = q[2]c_1 - a_3$, se deduce que

$$P_3(x) = x^3 - \frac{[3]c_2 + a_3}{q(1+q)}x.$$

Finalmente, de la combinación de esta última expresión junto con (6.100) se obtiene la relación deseada. □



Conclusiones y problemas abiertos

Conclusiones y problemas abiertos

7.1. Conclusiones

1. En el capítulo 3 se realizó un estudio general de los polinomios ortogonales clásicos usando el operador de Rodrigues. De forma análoga se pueden estudiar tanto los polinomios clásicos estándar como los Δ -clásicos.
2. En [71] Hahn caracterizó a los polinomios clásicos estándar como aquellos cuya derivada eran también ortogonales. Con el operador de Rodrigues se ha podido obtener el resultado recíproco demostrando que si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una familia de polinomios clásicos estándar, entonces $R_n(\rho_{-1}, x)[1]$ es una familia de polinomios clásica.
3. Muchas de las familias clásicas tienen asociada un álgebra dinámica cerrada, de hecho, ha quedado constatado que la q -linealidad del espectro del q -Hamiltoniano está relacionado con el hecho que dicha álgebra sea finita aunque, como también se ha visto, es una condición necesaria pero no suficiente.
4. El estudio de la familia de q -polinomios de Racah, considerados en el capítulo 5 ha permitido conocer la relación existente entre los polinomios clásicos y las representaciones de grupos de una forma directa.
5. El problema considerado en la sección §6.2 revela que la adición de varias masas (positivas) en diferentes puntos del eje real a un funcional clásico da lugar a un nuevo funcional (semiclásico) y que los polinomios que son ortogonales respecto a estos – los que se denominaron polinomios tipo Krall – satisfacen el mismo tipo de relaciones límite que los originales.
6. El estudio realizado en el capítulo 3 para funcionales lineales q -clásicos definidos por funciones peso y el realizado en §6.3 para funcionales lineales q -semiclásicos generales permite obtener un Teorema de caracterización análogo al obtenido en el capítulo 3 para los q -polinomios semiclásicos, pudiendo obtenerse una segunda fórmula de estructura para estos sobre la red q -lineal

$$x(s) = c_1 q^s + c_3, \quad (7.1)$$

análoga a (3.42).

7.2. Problemas abiertos

1. Encontrar el álgebra de simetrías dinámica asociada a las familias de q -polinomios de la tabla de q -Hahn que no se han podido obtener en esta memoria.
2. Encontrar una conexión explícita entre los generadores del álgebra $AW(3)$ y los operadores creación $\mathbf{a}$ y destrucción $\mathbf{b}$, los cuales factoricen al q -Hamiltoniano $\mathfrak{H}_q$ en estos casos.
3. Comprobar si las principales características de los q -polinomios de Racah están relacionadas con las representaciones del álgebra cuántica no compacta $U_q(su(2, 1))$.
4. Desarrollar una Teoría general de los polinomios semiclásicos, así como encontrar ejemplos de q -polinomios semiclásicos sobre la red no uniforme (7.1).
5. Construcción de nuevos análogos de q -osciladores asociados a las restantes familias de q -polinomios.

IV

Apéndices

Los esquemas de Askey y Hahn

$$\begin{aligned}\sigma(s) \frac{\Delta}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} + \lambda_n P_n(s) &= 0, \\ \sigma(s) &= \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{2} \tau(s) \nabla x_1(s), \quad \Theta(s) = \tilde{\sigma}(s) + \frac{1}{2} \tau(s) \nabla x_1(s), \\ x(s) P_n(s) &= \alpha_n P_{n+1}(s) + \beta_n P_n(s) + \gamma_n P_{n-1}(s), \\ x_1(s) \Delta^{(1)} P_n(s) &= \alpha_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_{n+1}(s) + \beta_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_n(s) + \gamma_n^{(1)} \Delta^{(1)} P_{n-1}(s),\end{aligned}$$

$$\sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)}{\nabla x(s)} = \tilde{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \tilde{\beta}_n P_n(s) + \tilde{\gamma}_n P_{n-1}(s),$$

$$\Theta(s) \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} = \hat{\alpha}_n P_{n+1}(s) + \hat{\beta}_n P_n(s) + \hat{\gamma}_n P_{n-1}(s),$$

$$MP_n(s) = \frac{P_n(s+1) + P_n(s)}{2} = e_n \frac{\Delta P_{n+1}(s)}{\Delta x(s)} + f_n \frac{\Delta P_n(s)}{\Delta x(s)} + g_n \frac{\Delta P_{n-1}(s)}{\Delta x(s)},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n} = \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_n} \pm \lambda_n \kappa_q, \quad \frac{\tilde{\beta}_n}{\beta_n} = \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_n} \pm \lambda_n \kappa_q, \quad \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} = \frac{\hat{\gamma}_n}{\gamma_n} \pm \lambda_n \kappa_q, \quad \text{si } x(s) = q^{\pm s},$$

$$e_n = \alpha_n - \frac{[2]_q}{2} \alpha_n^{(1)}, \quad f_n = \beta_n - \frac{[2]_q}{2} \beta_n^{(1)} + c_3 \left(1 - \frac{[2]_q}{2}\right), \quad g_n = \gamma_n - \frac{[2]_q}{2} \gamma_n^{(1)},$$

donde $x_1 = x(s + \frac{1}{2})$, $\kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}$, y Δ y ∇ son los operadores en diferencias finitas progresivas y regresivas, respectivamente, es decir, $\Delta f(s) = f(s+1) - f(s)$ y $\nabla f(s) = f(s) - f(s-1)$.

Tabla A.1: Datos principales de los polinomios de Askey-Wilson

	$p_n(x; a, b, c, d q) \quad x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}) \quad [-1, 1]$
$\sigma(s)$	$-\kappa_q^2 q^{-2s+\frac{1}{2}}(q^s - a)(q^s - b)(q^s - c)(q^s - d)$
$\Theta(s)$	$-\kappa_q^2 q^{2s+\frac{1}{2}}(q^{-s} - a)(q^{-s} - b)(q^{-s} - c)(q^{-s} - d)$
τ'_n	$4(1 - q)q^{-n} (1 - abcdq^{2n})$
$\tau_n(0)$	$2(q - 1)q^{-\frac{n}{2}} (a + b + c + d - (abc + abd + acd + bcd)q^n)$
$\tilde{\sigma}''$	$2q^{\frac{1}{2}} \kappa_q^2 (abcd + 1)$
$\tilde{\sigma}'(0)$	$-q^{\frac{1}{2}} \kappa_q^2 (a + b + c + d + abc + abd + acd + bcd)$
$\tilde{\sigma}(0)$	$q^{\frac{1}{2}} \kappa_q^2 (ab + cb - acdb + db + ac + ad + cd - 1)$
λ_n	$4q^{1-n}(1 - q^n) (1 - abcdq^{n-1})$
$\rho_n(s)$	$\frac{q^{2ns+n^2+n}}{\sqrt{1-x(s)^2}} \frac{(q^{s+n}, q^{-(s+n)}, q^{s+n+\frac{1}{2}}, q^{-s+n+\frac{1}{2}}, -q^{s+n+\frac{1}{2}}, -q^{-s+n+\frac{1}{2}}; q)_\infty}{(aq^{s+n}, aq^{-s}, bq^{s+n}, bq^{-s}, cq^{s+n}, cq^{-s}, dq^{s+n}, dq^{-s}; q)_\infty}$
d_n^2	$2\pi \frac{(abcdq^{n-1}; q)_n (abcdq^{2n}; q)_\infty}{(q^{n+1}, abq^{n+1}, acq^{n+1}, adq^{n+1}, bcq^{n+1}, bdq^{n+1}, cdq^{n+1}; q)_\infty}$
α_n	$\frac{1 - abcdq^{n-1}}{2(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})}$
β_n	$\frac{1}{2} \left(a + a^{-1} - (A_n + C_n)(a, b, c, d q) \right)$
γ_n	$\frac{1}{2a} (1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})C_n(a, b, c, d q)$
e_n	$\frac{2[n]_q(1 - abcdq^{n-1})^2 - [2]_q[n+1]_q(1 - abcdq^n)^2}{4[n]_q(1 - abcdq^{n-1})(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})}$
f_n	$\frac{1-q}{4} (a - a^{-1}q^{-1}) - \frac{1}{2} \left(A_n(a, b, c, d q) + C_n(a, b, c, d q) \right. \\ \left. - \frac{[2]_q}{2} (A_{n-1}(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}} q) + C_{n-1}(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}} q)) \right)$
g_n	$\frac{(1 - abcdq^{n-2})(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})}{4[n]_q(1 - abcdq^{n-1})^2} \left(\frac{2[n]_q(A_{n-1}C_n)(a, b, c, d q)}{(1 - abcdq^{n-2})^2} \right. \\ \left. - \frac{[2]_q[n-1]_q(A_{n-2}C_{n-1})(aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}} q)}{(1 - abcdq^{n-1})^2} \right)$

Donde

$$A_n(a, b, c, d|q) = \frac{(1 - abq^n)(1 - acq^n)(1 - adq^n)(1 - abcdq^{n-1})}{a(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})},$$

$$C_n(a, b, c, d|q) = \frac{a(1 - q^n)(1 - bcq^{n-1})(1 - bdq^{n-1})(1 - cdq^{n-1})}{(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})}.$$

Tabla A.2: Datos principales de los q -polinomios de Racah $u_n^{\alpha,\beta}(x(s), a, b)_q$

	$u_n^{(\alpha,\beta)}(x(s), a, b)$	$x(s) = [s]_q[s+1]_q$	$[a, b]$
$\sigma(s)$		$[s-a]_q[s+b]_q[s+a-\beta]_q[b+\alpha-s]_q$	
$\Theta(s)$		$[s+a+1]_q[b-s-1]_q[s-a+\beta+1]_q[b+\alpha+s+1]_q$	
τ'_n		$-[2n+\alpha+\beta+2]_q$	
$\tau_n(0)$		$2kq^{-2}(\alpha_q(2a-\beta)[n+\alpha+1]_q + \alpha_q(2b+\alpha)[n+\beta+1]_q - \alpha_q(1)[2+\alpha+\beta+n+1])$	
$\tilde{\sigma}''$		$-\alpha_q(\alpha+\beta+2)$	
$\tilde{\sigma}'(0)$		$2\kappa_q^{-2}(\alpha_q(a-b+1)\alpha_q(a+b+\alpha-\beta) + \alpha_q(a+b)\alpha_q(b-a+\alpha+\beta+1) - 2\alpha_q(1)\alpha_q(\alpha+\beta+2))$	
$\tilde{\sigma}(0)$		$2\kappa_q^{-4}(2\alpha_q(1)(\alpha_q(a+b)\alpha_q(b-a+\alpha+\beta+1) + \alpha_q(a-b+1)\alpha_q(a+b+\alpha-\beta)) - \alpha_q(2)\alpha_q(2+\alpha+\beta) - \alpha_q(\beta-\alpha) - \alpha_q(2a+2b+\alpha-\beta) - \alpha_q(2b-2a+\alpha+\beta))$	
λ_n		$[n]_q[n+\alpha+\beta+1]_q$	
$\rho_n(s)$		$\frac{\tilde{\Gamma}(s+n+a+1)\tilde{\Gamma}(s+n-a+\beta+1)\tilde{\Gamma}(s+n+\alpha+b+1)\tilde{\Gamma}(b+\alpha-s)}{\tilde{\Gamma}(s-a+1)\tilde{\Gamma}(s+b+1)\tilde{\Gamma}(s+a-\beta+1)\tilde{\Gamma}(b-s-n)}$ $-\frac{1}{2} < a \leq b-1, \alpha > -1, -1 < \beta < 2a+1$	
d_n^2		$\frac{\tilde{\Gamma}(\alpha+n+1)\tilde{\Gamma}(\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a+\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(a+b+\alpha+n+1)}{[\alpha+\beta+2n+1]_q\tilde{\Gamma}(n+1)\tilde{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)\tilde{\Gamma}(b-a-n)\tilde{\Gamma}(a+b-\beta-n)}$	
k_n		$\frac{\tilde{\Gamma}[\alpha+\beta+2n+1]_q}{[n]_q!\tilde{\Gamma}[\alpha+\beta+n+1]_q}$	
α_n		$\frac{[n+1]_q[\alpha+\beta+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q}$	
β_n		$[a]_q[a+1]_q - \frac{[\alpha+\beta+n+1]_q[a-b+n+1]_q[\beta+n+1]_q[a+b+\alpha+n+1]_q}{[\alpha+\beta+2n+1]_q[\alpha+\beta+2n+2]_q}$ $+ \frac{[\alpha+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[a+b-\beta-n]_q[n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q}$	
γ_n		$\frac{[a+b+\alpha+n]_q[a+b-\beta-n]_q[\alpha+n]_q[\beta+n]_q[b-a+\alpha+\beta+n]_q[b-a-n]_q}{[\alpha+\beta+2n]_q[\alpha+\beta+2n+1]_q}$	

$$\begin{aligned}
e_n & \frac{2[n + \alpha + \beta + 1]_q - [2]_q[n + \alpha + \beta + 2]_q}{2[2n + \alpha + \beta + 1]_q[2n + \alpha + \beta + 2]_q} [n + 1]_q \\
f_n & \beta_n(a, b, \alpha, \beta) - \frac{[2]_q}{2} \beta_n(a + \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, \alpha + 1, \beta + 1) \\
g_n & \frac{(2[n + \alpha + \beta + 1]_q - [2]_q[n + \alpha + \beta]_q) \frac{[a + b + \alpha + n]_q[a + b - \beta - n]_q[\alpha + n]_q}{2[\alpha + \beta + 2n]_q[\alpha + \beta + 2n + 1]_q}}{\times \frac{[\beta + n]_q[b - a + \alpha + \beta + n]_q[b - a - n]_q}{[n + \alpha + \beta + 1]_q}}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\beta_n(a, b, \alpha, \beta) & := [a]_q[a + 1]_q - \frac{[\alpha + \beta + n + 1]_q[a - b + n + 1]_q[\beta + n + 1]_q}{[\alpha + \beta + 2n + 1]_q[\alpha + \beta + 2n + 2]_q} \\
& \times [a + b + \alpha + n + 1]_q + \frac{[\alpha + n]_q[b - a + \alpha + \beta + n]_q[a + b - \beta - n]_q[n]_q}{[\alpha + \beta + 2n]_q[\alpha + \beta + 2n + 1]_q}
\end{aligned}$$

Tabla A.3: Datos principales de los q -polinomios grandes de Jacobi

	$p_n(x; a, b, c; q)$	$x(s) = q^s$	$[cq, aq]$
$\sigma(s)$	$q^{-1}(x - aq)(x - cq)$		
$\Theta(s)$	$aq(x - 1)(bx - c)$		
τ'_n	$-q^{-(n+1)}\kappa_q^{-1}(1 - abq^{2n+2})$		
$\tau_n(0)$	$\kappa_q^{-1}q^{-\frac{n}{2}}(a + c - a(b + c)q^{n+1})$		
$\tilde{\sigma}''$	$q^{-1}(1 + abq^2)$		
$\tilde{\sigma}'(0)$	$-\frac{1}{2}(a + c + a(b + c)q)$		
$\tilde{\sigma}(0)$	acq		
λ_n	$q^{-\frac{n+1}{2}}\kappa_q^{-1}[n]_q(1 - abq^{n+1})$		
$\rho_n(s)$	$\frac{1}{aq(1 - q)} \frac{(aq, bq, cq, abc^{-1}q, a^{-1}x, c^{-1}x; q)_\infty}{(q, abq^2, a^{-1}c, ac^{-1}q, q^n x, bc^{-1}q^n x; q)_\infty}$		
d_n^2	$\frac{(1 - abq)(q, bq, abc^{-1}q; q)_n}{(1 - abq^{2n+1})(aq, abq, cq; q)_n} (-ac)^n q^{\frac{n(n+3)}{2}}$		
α_n	1		
β_n	$\frac{q^{1+n} \left(c + a^2 bq^n ((1 + b + c)q^{1+n} - q - 1) + a(1 + c - cq^n - cq^{n+1} + b(1 - q^n - cq^n - q^{n+1} - cq^{n+1} + cq^{2n+1})) \right)}{(1 - abq^{2n})(1 - abq^{2n+2})}$		
γ_n	$-\frac{(1 - q^n)(1 - aq^n)(1 - bq^n)(1 - abq^n)(c - abq^n)(1 - cq^n)}{a^{-1}q^{-(n+1)}(1 - abq^{2n})^2(1 - abq^{2n-1})(1 - abq^{2n+1})}$		

e_n	$1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{(1-q^{n+1})(1-abq^{n+2})}{(1-q^n)(1-abq^{n+1})}$
f_n	$\beta_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \beta_{n-1}(aq, bq, cq), \quad \beta_n(a, b, c) := \beta_n$
g_n	$\gamma_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{(1-q^{n+1})(1-abq^n)}{(1-q^n)(1-abq^{n+1})} \gamma_{n-1}(aq, bq, cq), \quad \gamma_n(a, b, c) := \gamma_n$
$\hat{\alpha}_n/\alpha_n$	$abq^{\frac{n+1}{2}} [n]_q$
$\hat{\beta}_n/\beta_n$	$-\frac{q^{-\frac{1+n}{2}} a[n]_q (1-abq^{n+1}) (c+ab^2q^{2n+1}+b(1-cq^n-cq^{n+1}-aq^n(1+q-cq^{n+1})))}{c+a^2bq^n((1+b+c)q^{1+n}-q-1)+a(1+c-cq^n-cq^{n+1}+b(1-q^n-cq^n-q^{n+1}-cq^{n+1}+cq^{2n+1}))}$
$\hat{\gamma}_n/\gamma_n$	$-\frac{1-abq^{n+1}}{q^n(1-q)}$

Nótese que como casos particulares de los q -polinomios pequeños de Jacobi se obtienen los q -polinomios grandes de Laguerre (tomando $b = 0$) [85, p. 124], y los q -polinomios pequeños de Jacobi (tomando $c = 0$) [85, p. 74]. Nótese además que, a su vez, un caso especial de los q -polinomios grandes de Laguerre son los q -polinomios afines de Kravchuk [85, p. 101]

$$K_n^{Aff}(q^{-s}; p, N; q) = P_n(q^{-s}; p, q^{-N-1}; q), \quad (\text{A.1})$$

y dos casos especiales de los q -polinomios pequeños de Jacobi son los q -polinomios pequeños de Laguerre (tomando $b = 0$) [85, p. 129], y los q -polinomios alternativos de Charlier [85, p. 136]

$$\lim_{a \rightarrow 0} p_n \left(x; a, -\frac{b}{aq} | q \right) = K_n(x; a; q). \quad (\text{A.2})$$

Tabla A.4: Datos principales de los q -polinomios de Hahn

	$Q_n(q^{-x}; \alpha, \beta, N q)$	$x(s) = q^{-s}$	$[1, q^{-N}]$
$\sigma(s)$	$(x-1)(\alpha q^N - x)$		
$\Theta(s)$	$-\alpha(qx - q^N)(\beta qx - 1)$		
τ'_n	$-q^n \kappa_q^{-1} (1 - \alpha \beta q^{2-2n})$		
$\tau_n(0)$	$\kappa_q^{-1} q^{-\frac{n}{2}} \left(q^n - \alpha q + \alpha q^{n+N} - \alpha \beta q^{N+1} \right)$		
$\tilde{\sigma}''$	$-(1 + \alpha \beta q^2)$		
$\tilde{\sigma}'(0)$	$\frac{1}{2} (1 + \alpha q + \alpha q^N + \alpha \beta q^{N+1})$		
$\tilde{\sigma}(0)$	$-\alpha q^N$		
λ_n	$q^{\frac{n-1}{2}} \kappa_q^{-1} [n] (1 - \alpha \beta q^{3-n})$		
$\rho_n(s)$	$\frac{(\alpha q^{n+1}, q^{-N+n}; q)_s}{(q, \beta^{-1} q^{-N}; q)_s} (\alpha \beta q^{2n})^{-s}$		
d_n^2	$-\kappa_q \frac{(\alpha, \beta q^2; q)_N}{(\beta q; q)_N \alpha^N} \frac{(q, \alpha q, \alpha \beta q^{N+2}, \beta q, q^{-N}; q)_n}{(\alpha \beta q, \alpha \beta q^{n+1}, \alpha \beta q^{n+1}; q)_n} \frac{(1 - \alpha \beta q)(-\alpha)^n}{1 - \alpha \beta q^{2n+1}} q^{(n+1)(\frac{n}{2}-N)}$		
α_n	1		
β_n	$q^n \frac{1 + \alpha - \alpha q^n - \alpha q^{n+1} + \alpha q^N + \alpha^2 \beta^2 q^{2n+N+1}}{(1 - \alpha \beta q^{2n})(1 - \alpha \beta q^{2n+2})} + \frac{\alpha \beta (q^N - q^n(1+q)(1+q^N + \alpha q^N) + q^{1+2n}(1 + \alpha + \alpha q^N))}{(1 - \alpha \beta q^{2n})(1 - \alpha \beta q^{2n+2})}$		
γ_n	$\frac{(1 - q^n)(1 - \alpha q^n)(1 - \beta q^n)(1 - \alpha \beta q^n)(q^n - q^N)(1 - \alpha \beta q^{n+N})}{\alpha^{-1} q^{-n} (1 - \alpha \beta q^{2n})^2 (1 - \alpha \beta q^{2n-1})(1 - \alpha \beta q^{2n+1})}$		
e_n	$1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{(1 - q^{n+1})(1 - \alpha \beta q^{n+2})}{q(1 - q^n)(1 - \alpha \beta q^{n+1})}$		
f_n	$\beta_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \beta_{n-1}(\alpha q, \beta q, N-1), \quad \beta_n(\alpha, \beta, N) := \beta_n$		
g_n	$\gamma_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{(1 - q^{n-1})(1 - \alpha \beta q^n)}{(1 - q^n)(1 - \alpha \beta q^{n+1})} \gamma_{n-1}(\alpha q, \beta q, N-1), \quad \gamma_n(\alpha, \beta, N) := \gamma_n$		

Nótese que un caso particular de los q -polinomios Hahn son los q -polinomios de Krawtchouk [85, p. 125]

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Q_n(q^{-x}; \alpha, -\alpha^{-1} q^{-1} p, N|q) = K_n(q^{-x}; p, N; q). \quad (\text{A.3})$$

Tabla A.5: Datos principales de los q -polinomios duales de Hahn

	$W_n^c(x(s); a, b)$	$\mu(x) = [s]_q[s+1]_q$	$[a, b-1]$
$\sigma(s)$	$q^{\frac{1}{2}(s+c+a-b+2)}[s-a]_q[s+b]_q[s-c]_q$		
$\Theta(s)$	$q^{\frac{1}{2}(-s+c+a-b+1)}[s+a+1]_q[-s+b-1]_q[s+c+1]_q$		
τ'_n	$-q^{-n}$		
$\tilde{\sigma}''$	$\frac{1}{2}\kappa_q$		
$\tilde{\sigma}'(0)$	$\frac{-q^{a+1} - q^{1-b} - q^{c+1} - q^{a-b+c+2} + 2q + 2}{2(q-1)}$		
$\tilde{\sigma}(0)$	$\frac{2q^2(q^{a-b} + q^{a+c} + q^{-b+c}) - (q+1)q(q^a + q^{-b} + q^c + q^{a-b+c+1}) + q^2 + 1}{2(q-1)^2\kappa_q}$		
λ_n	$q^{-\frac{1}{2}(n-1)}[n]_q$		
$\rho_n(s)$	$q^{-\frac{1}{2}s(s+1+n) - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}(a+c-b+\frac{3}{2})} \frac{\tilde{\Gamma}_q(s+a+n+1)\tilde{\Gamma}_q(s+c+n+1)}{\tilde{\Gamma}_q(s-a+1)\tilde{\Gamma}_q(s-c+1)\tilde{\Gamma}_q(s+b+1)\tilde{\Gamma}_q(b-s-n)}$		
d_n^2	$q^{\frac{1}{2}(ac-ab-bc+a+c-b+1+2n(a+c-b)-n^2+5n)} \frac{\tilde{\Gamma}_q(a+c+n+1)}{[n]_q\tilde{\Gamma}_q(b-c-n)\tilde{\Gamma}_q(b-a-n)}$		
α_n	$q^{\frac{3}{2}n}[n+1]_q$		
β_n	$q^{\frac{1}{2}12(2n-b+c+1)}[b-a-n+1]_q[a+c+n+1]_q$ $+q^{\frac{1}{2}(2n+2a+c-b+1)}[n]_q[b-c-n]_q + [a]_q[a+1]_q$		
γ_n	$q^{\frac{1}{2}(n+3+2(c+a-b))}[n+a+c]_q[b-a-n]_q[b-c-n]_q$		

Tabla A.6: Datos principales de los q -polinomios de Meixner

	$M_n(q^{-x}; b, c; q)$	$x(s) = q^{-s}$	$[1, +\infty)$
$\sigma(s)$	$q^{-1}c(x-bq)$		
$\Theta(s)$	$(x-1)(x+bc)$		
τ'_n	$q^{-n}\kappa_q^{-1}$		
$\tau_n(0)$	$q^{1-\frac{n}{2}}(cq^n - bcq + q)\kappa_q^{-1}$		
$\tilde{\sigma}''$	1		

$\tilde{\sigma}'(0)$	$\frac{bqc + c - q}{2q}$
$\tilde{\sigma}(0)$	$-bc$
λ_n	$q^{-\frac{n+1}{2}} \kappa_q^{-1} [n]_q$
$\rho_n(s)$	$\frac{(bq; q)_{s+n+1} c^{s+n+1} q^{\binom{s+n+1}{2}}}{(q; -bcq; q)_{s+1}}$
α_n	$\frac{1}{q^{-n} + cq^{-2n-1}(1+q - (1+b)q^{n+1})}$
β_n	$cq^{-4n+1}(1-q^n)(c+q^n)(1-bq^n)$
γ_n	$\frac{1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n}}{1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n}}$
e_n	$\frac{1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n}}{1 - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n}}$
f_n	$\beta_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \beta_{n-1}(bq, cq^{-1}), \quad \beta_n(a, b) := \beta_n$
g_n	$\gamma_n - q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2]_q}{2} \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^n} \gamma_{n-1}(bq, cq^{-1}), \quad \gamma_n(a, b) := \gamma_n$
$\hat{\alpha}_n / \alpha_n$	$\frac{1 - q^n}{1 - q}$
$\hat{\beta}_n / \beta_n$	$\frac{(1 - q)(q^{-n} + cq^{-2n-1}(1+q - (1+b)q^{n+1}))}{q^{-1-2n}(1 - q^n)(q^{n+1} + c(1+q - bq^{n+1}))}$
$\hat{\gamma}_n / \gamma_n$	$1 - q$

Nótese que casos particulares de los q -polinomios de Meixner son los q -polinomios cuánticos de Kravchuck [85, p. 98]

$$K_n^{qtm}(q^{-s}; p, N; q) = M_n(q^{-s}; q^{-N-1}, -p^{-1}; q), \quad (\text{A.4})$$

los polinomios de Al-Salam & Carlitz II [85, p. 137]

$$\lim_{c \rightarrow 0} M_n\left(x; -\frac{a}{c}, c; q\right) = \left(-\frac{1}{a}\right)^n q^{\binom{n}{2}} V_n^{(a)}(x; q), \quad (\text{A.5})$$

los q -polinomios de Laguerre [85, p. 133]

$$\lim_{c \rightarrow \infty} M_n(cax; a, c; q) = \frac{(q; q)_n}{(aq; q)_n} L_n^{(\alpha)}(x; q), \quad a = q^\alpha, \quad (\text{A.6})$$

y los q -polinomios de Charlier [85, p. 136]

$$M_n(x; 0, a; q) = C_n(x; a; q). \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado, nótese que los polinomios de Al-Salam & Carlitz I están relacionados con los polinomios de Al-Salam & Carlitz II mediante la expresión [85, p. 114]

$$U_n^{(a)}(x; q^{-1}) = V_n^{(a)}(x; q), \quad (\text{A.8})$$

los q -polinomios de Stieltjes-Wigert están relacionados con los q -polinomios de Laguerre mediante la expresión [85, 136]

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} L_n^{(\alpha)}(xq^{-\alpha}; q) = S_n(x; q). \quad (\text{A.9})$$

Publicaciones

El contenido original de esta tesis aparece en los siguientes artículos:

1. Capítulo 1:

- “*Classical orthogonal polynomials. A general difference calculus approach*”. Preprint, <http://arxiv.org/abs/math.CA/0612097>, 2006.

2. Capítulo 5:

- “*Factorization method for difference equations of hypergeometric-type on nonuniform lattices*”, R. Álvarez-Nodarse y R. S. Costas-Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**(21) (2001), 5551–5569.
- “*Factorization of the hypergeometric type difference equation on the uniform lattice*”, R. Álvarez-Nodarse, N. M. Atakishiev, y R. S. Costas-Santos, *Elect. Trans. on Num. Anal.* (2007). En prensa.
- “*Factorization of the hypergeometric-type difference equation on non-uniform lattices: dynamical algebra*”, R. Álvarez-Nodarse N. M. Atakishiyev y R. S. Costas-Santos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**(1) (2005), 153–174.
- “*A q -analog of Racah polynomials and q -algebra $SU_q(2)$ in quantum optics*”, R. Álvarez-Nodarse, Yu. F. Smirnov y R. S. Costas-Santos, *Journal of Russian Laser Research* **27**(1) (2006), 1–32.

3. Capítulo 6:

- “*Limit relations between q -Krall type orthogonal polynomials*”, R. Álvarez-Nodarse y R. S. Costas-Santos, *J. Math. Anal. Appl.* **322**(1) (2006), 158–176.
- “*Second structure relation for q -semiclassical polynomials of the Hahn Tableau*”, R. S. Costas-Santos y F. Marcellán, *J. Math. Anal. Appl.* **329**(1) (2007), 206–228.

Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in Analysis*. Oliver y Boyd, Edinburg and London, 1965. [69]
- [2] W. A. Al-Salam. Characterization theorems for orthogonal polynomials. En: In *Orthogonal polynomials: Theory and Practice*. P. Nevai (Ed.) NATO ASI Series C, **Vol. 294**, Kluwer Acad. Publ., Dorcrecht, 1990, 1–24. [7, 14, 109]
- [3] W. A. Al-Salam y T. S. Chihara. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **3** (1972), 65–70. [14, 15]
- [4] M. Alfaro y R. Álvarez-Nodarse. A characterization of the classical orthogonal discrete and q -polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **201** (2007), 48–54. [15]
- [5] R. N. Álvarez, D. Bonastos, y Yu. F. Smirnov. q -Deformed vibron model for diatomic molecules. *Phys. Rev. A* **50** (1994), 1088–1095. [49]
- [6] R. Álvarez-Nodarse. q -analog of the vibrational IBM and the quantum algebra $su_q(1, 1)$ (en ruso). Master thesis, Moscow State University, M.V. Lomonosov, 1992. [85]
- [7] R. Álvarez-Nodarse. *Polinomios generalizados y q -polinomios: propiedades espectrales y aplicaciones*. Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, Leganes, Madrid, 1996. [42, 86]
- [8] R. Álvarez-Nodarse. *Polinomios hipergeométricos y q -polinomios, Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano” Núm. 26*. Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza: Spain, 2003. En Español. [5, 74, 111]
- [9] R. Álvarez-Nodarse. On characterization of classical polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **196** (2006), 320–337. [7, 14, 15, 31, 39]
- [10] R. Álvarez-Nodarse. Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* **18** (2001), 19–45. [5]
- [11] R. Álvarez-Nodarse y J. Arvesú. On the q -polynomials on the exponential lattice $x(s) = c_1 q^s + c_3$. *Integral Trans. Spec. Funct.* **8** (1999), 299–324. [23, 24]
- [12] R. Álvarez-Nodarse, J. Arvesú, y F. Marcellán. Modifications of quasi-definite linear functionals via addition of delta and derivatives of delta Dirac functions. *Indag. Math. (N.S.)* **15**(1) (2004), 1–20. [108]
- [13] R. Álvarez-Nodarse, N. M. Atakishiev, y R. S. Costas-Santos. Factorization of the hypergeometric-type difference equation on uniform lattice. *Elect. Trans. Num. Anal.* (2007). *En prensa*. [6, 8, 48, 73]

- [14] R. Álvarez-Nodarse, N. M. Atakishiev, y R. S. Costas-Santos. Factorization of the hypergeometric-type difference equation on the non-uniform lattices: dynamical algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**(1) (2005), 153–174. [6, 8, 48, 65]
- [15] R. Álvarez-Nodarse, M. Atakishiyeva, y N. M. Atakishiyev. On a q -extension of the linear harmonic oscillator with the continuous orthogonality property on $\mathbb{R}$. *Czechoslovak Journal of Physics* **55** No. 11 (2005), 1315–1320. Preprint en <http://euler.us.es/~renato/pub.html> [6]
- [16] R. Álvarez-Nodarse y R. S. Costas-Santos. Factorization method for difference equations of hypergeometric type on nonuniform lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 5551–5569. [6, 7, 20, 48, 59, 72]
- [17] R. Álvarez-Nodarse y R. S. Costas-Santos. Limit relations between q -Krall type orthogonal polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **322** (2006), 158–176. [8, 120]
- [18] R. Álvarez-Nodarse, A. G. García, y F. Marcellán. On the properties for modifications of classical orthogonal polynomials of discrete variables. *J. Comput. Appl. Math.* **65**(1-3) (1995), 3–18. [108]
- [19] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán. Difference equation for modifications of Meixner polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **194**(1) (1995), 250–258. [108]
- [20] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán. The modification of classical Hahn polynomials of a discrete variable. *Integral Trans. Spec. Funct.* **3**(4) (1995), 243–262. [108, 120]
- [21] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán. The limit relations between generalized orthogonal polynomials. *Indag. Math. (N.S.)* **8** (1997), 295–316. [4, 108, 109, 114, 120]
- [22] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán, y J. Petronilho. WKB approximations and Krall-type orthogonal polynomials. *Acta Appl. Math.* **54** (1998), 27–58. [4, 108]
- [23] R. Álvarez-Nodarse y J. C. Medem. q -classical polynomials and the q -Askey and Nikiforov-Uvarov tableaux. *J. Comput. Appl. Math.* **135**(2) (2001), 197–223. [57, 66, 109]
- [24] R. Álvarez-Nodarse y J. Petronilho. On the Krall-type discrete polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **295**(1) (2004), 55–69. [108, 109, 114, 117, 118]
- [25] R. Álvarez-Nodarse y Yu. F. Smirnov. q -dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ and the q -algebras $su_q(1,1)$ and $su_q(2)$. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, (1996), 1435–1451. [49, 85, 86]
- [26] R. Álvarez-Nodarse y Yu. F. Smirnov. Dual properties of orthogonal polynomials of discrete variable associated with quantum algebra $U_q(su(2))$. *J. Russian Laser Res.* (2007). En prensa. [90]
- [27] R. Álvarez-Nodarse, Yu. F. Smirnov, y R. S. Costas-Santos. A q -analog of the Racah polynomials and q -algebra $su_q(2)$ in quantum optics. *J. Russian Laser Res.* **27**(1) (2006), 1–32. [8, 43, 49, 86, 103]
- [28] G. E. Andrews. *q -Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*. Vol. **66** de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1996. [17]
- [29] P. M. Asherova, Yo. F. Smirnov, y V. N. Tolstoi. Weyl coefficients for $u_q(3)$ and Racah q -coefficients for $su_q(2)$. *Sov. J. Nucl. Phys.* **58** (1996), 1859–1872.

- [30] R. Askey y S. K. Suslov. The q -harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 693–698. [6, 68]
- [31] R. Askey y S. K. Suslov. The q -harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials. *Lett. Math. Phys.* **29**(2) (1993), 123–132. [6, 58, 68]
- [32] R. Askey y R. Wilson. A set of orthogonal polynomials that generalize Racah coefficients or $6j$ symbols. *SIAM J. Math. Anal.* **10** (1979), 1008–1020. [49, 85]
- [33] R. Askey y R. Wilson. Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.* **319**. Providence, Rhode Island, 1985. [5, 41, 85]
- [34] N. M. Atakishiev. Construction of dynamical system group of the relativistic harmonic oscillator by the Infeld-Hull factorization method. *Theoret. and Math. Phys.* **56**(1) (1984), 735–739. [6, 47, 48]
- [35] N. M. Atakishiev, A. Frank, y K. B. Wolf. A simple difference realization of the Heisenberg q -algebra. *J. Math. Phys.* **35** (1994), 3253–3260. [6, 47, 68]
- [36] N. M. Atakishiev, E. I. Jafarov, S. M. Nagiyev, y K. B. Wolf. Meixner oscillators. *Rev. Mexicana Fís.* **44**(3) (1998). [6, 48, 77, 81]
- [37] N. M. Atakishiev y S. K. Suslov. Difference analogs of the harmonic oscillator. *Theoret. and Math. Phys.* **85**(1) (1991), 1055–1062. [6, 47, 58, 68, 69, 72]
- [38] N. M. Atakishiev y S. K. Suslov. A realization of the q -harmonic oscillator. *Theoret. and Math. Phys.* **87**(1) (1991), 442–444. [6, 56, 58, 68, 72]
- [39] N. M. Atakishiev y B. Wolf. Approximations on a finite set of points through Kravchuk functions. *Rev. Mex. Fis.* **40** (1994), 1055–1062. [47, 49, 54]
- [40] N. M. Atakishiyev, M. Rahman, y S. K. Suslov. On classical orthogonal polynomials. *Const. Approx.* **11** (1995), 181–226. [5, 20, 21, 60]
- [41] G. Bangerezako. Discrete Darboux transformation for discrete polynomials of hypergeometric type. *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 2191–2196. [6, 48]
- [42] G. Bangerezako. The factorization method for the Askey-Wilson polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **107**(2) (1999), 219–232. [6, 47]
- [43] G. Bangerezako y M. N. Hounkonnou. The factorization method for the general second-order q -difference equation and the Laguerre-Hahn polynomials on the general q -lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**(3) (2003), 765–773. [6]
- [44] G. Bangerezako y A. P. Magnus. The factorization method for the semi-classical polynomials. En V. B. Priezhev y V. P. Spiridonov, *Proc. IW SSS JINR E5-99-38*, 295–300, Dubna, 1999. [6]
- [45] A. O. Barut. *Dynamical Groups and Generalized symmetries in Quatum Theory*. New Zeland, 1971. [5]
- [46] H. Bavinck y H. Haeringen. Difference equations for generalized Meixner polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* **184** (1994), 453–463. [108]

- [47] H. Bavinck y K. Koekoek. On a difference equation for generalizations of Charlier polynomials. *J. Approx. Theory* **81** (1995), 195–206. [108]
- [48] L. C. Biedenharn. The quantum group $su_q(2)$ and a q -analogue of the bosson operators. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989), 873–878. [47, 56]
- [49] S. Bochner. Über sturm-liouvillesche polynomsysteme. *Math. Zeit.* **29** (1929), 730–736. [4, 15]
- [50] D. Bonastos, E. N. Argyres, y P. P. Raychev. $su_q(1, 1)$ description of vibrational molecular spectra. *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), 403–408. [49]
- [51] D. Bonastos, S. B. Drenska, P. P. Raychev, y Yu. F. Smirnov. Description of superdeformed bands by quantum algebra $su_q(2)$. *J. Phys. G* **17** (1991), 67–74. [49]
- [52] D. Bonastos, P. P. Raychev, R. P. Roussev, y Yu. F. Smirnov. Description of rotational molecular spectra by the quantum algebra $su_q(2)$. *Chem. Phys. Lett.* **175** (1990), 300–306. [49]
- [53] J. L. Burchnell y T. W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators. II The identity $P^n = Q^m$. *Proc. Roy. Soc. A* **134** (1931), 471–485. [4]
- [54] A. Cachafeiro, F. Marcellán, and J. J. Moreno-Balcázar. On asymptotic properties of freud-sobolev. *J. Approx. Theory* **125** (2003), 26–41. [140]
- [55] V. G Kac y P. Cheung. *Quantum Calculus*. Springer, 2002. [18]
- [56] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978. [5, 7, 11, 12, 13, 14, 109, 118]
- [57] R. S. Costas-Santos. Classical orthogonal polynomials. A general difference calculus approach. Preprint, 2006. [25]
- [58] R. S. Costas-Santos y F. Marcellán. Second structure relation for q -semiclassical polynomials of the hahn tableau. *J. Math. Anal. Appl.* **329**(1) (2007), 206–228. [8]
- [59] G. Darboux. *Théorie des Surfaces*, vol. II. Gauthier-Villars, Paris. [6]
- [60] H. J. de Vega. Yang-baxter algebras, integrable systems and quantum groups. *Int. J. Mod. Phys.* (1989), 2371–2463. [49]
- [61] V. G. Drinfel'd. Quantum Groups. En Proc. of ICM, Berkeley, 1986, A. Gleason (Ed.), Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 798–820. [48, 85]
- [62] L. D. Faddeev. Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory. In *Les Houches Lectures*, Elsevier, Amsterdam, 1982, 563–573. [48]
- [63] L. D. Faddev y L. A. Takhtajan. *Lett. Notes Phys.* **246** (1986), 183. [48, 85]
- [64] J. Favard. Sur les polynômes de Tchebicheff. *C. R. Acad. Sci. Paris* **200** (1935), 2052–2053. [14]
- [65] A. G. García, F. Marcellán, y L. Salto. A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **57**(1-2) (1995), 147–162. [7, 12, 14, 15, 136]

- [66] G. Gasper y M. Rahman. *Basic Hypergeometric Series. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. [5, 16, 17, 22, 88, 94, 110, 111]
- [67] C. Coulston Gillispie. *Dictionary of Scientific Biography. 8 Vols.* Charles Scribners's Sons, Nueva York, 1981. [5]
- [68] E. Godoy, F. Marcellán, L. Salto, y A. Zarzo. Perturbations of discrete semiclassical functions by Dirac masses. *Integral Transformations Transform. Spec. Funct.* **5** (1997), 19–46. [108]
- [69] B. Gruber, Yu. F. Smirnov, y Yu. I. Kharitonov. Quantum algebra $u_q(gl(3))$ and nonlinear optics. *J. Russian Laser Res.* **24** (2003), 56–68. [48]
- [70] J. Guerrero, V. I. Man'ko, G. Marmo, y A. Simoni. Geometrical aspects of the Lie group representation and their optical applications. *J. Russ. Laser Res.* **23** (2002), 49–80. [48]
- [71] W. M. Hahn. Über orthogonalpolynomen die q -differentialgleichungen genügen. *Math. Nachr.* **2** (1949), 4–34. [7, 15, 17, 109]
- [72] W. M. Hahn. Über die Jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen. *Math. Zeit.* **39** (1935), 634–638. [145]
- [73] E. Hendriksen y H. Van Rossum. Semi-classical orthogonal polynomials. In C. Brezinski et al., editor, *Polynômes orthogonaux et leurs applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 354–361. [4]
- [74] L. Infeld y T. E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Physics* **23** (1951), 21–68. [6]
- [75] M. E. H. Ismail. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Encyclopedia Math. Appl.*, vol. **98**. Cambridge Univ. Press. 2005. [114]
- [76] M. Jimbo. Quantum R -matrix for the generalized toda system. *Commun. Math. Phys.* **102** (1986), 537–547. [48, 85]
- [77] L. Kheriji. An introduction to the H_q -semiclassical orthogonal polynomials. *Meth. Appl. Anal.* **10** (2003), 387–412. [108, 109, 122, 124, 125, 127]
- [78] L. Kheriji y P. Maroni. The H_q classical orthogonal polynomials. *Acta Appl. Math.* **71** (2002), 49–115. [108, 109]
- [79] A. N. Kirillov y N. Yu. Reshetikhin. Lomi preprint e-9-88. Leningrad, 1988. [85], 85
- [80] A. U. Klimyk, Yu. F. Smirnov, y B. Gruber. Representation of the quantum algebras $u_q(su(2))$ and $u_q(su(1, 1))$. En B. Gruber et al. (Ed.), *Symmetries in Science*, vol. **V**, Plenum Perss, New York, 1991. [49]
- [81] J. Koekoek y R. Koekoek. On a differential equation for Koornwinder's generalized Laguerre polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* **112** (1991), 1045–1054. [108]
- [82] R. Koekoek y R. F. Swarttouw. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue*, vol. **98-17**. Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, The Netherlands, 1998. [5, 22, 41, 54, 56, 57, 58, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 85, 110, 111, 112, 113, 115, 120, 125, 154, 155, 157]

- [83] H. T. Koelink. Askey-Wilson polynomials and the quantum $su(2)$ group : Survey and applications. *Acta Appl. Math.* **44** (1996), 295–352. [49, 86]
- [84] W. Koepf y D. Schmersau. On a structure formula for classical q -orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **136** (2001), 99–107. [109]
- [85] T. H. Koornwinder. Orthogonal polynomials with weight function $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta + m\delta(x + 1) + n\delta(x - 1)$. *Canad. Math. Bull.* **27**(2) (1984), 205–214. [108, 115, 120]
- [86] T. H. Koornwinder. Orthogonal polynomials in connection with quantum groups. En *Orthogonal Polynomials. Theory and Practice*. P. Nevai (Ed.) NATO ASI Series C 294, **vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, The Netherlands, 1990, 257–292. [5, 49]
- [87] T. H. Koornwinder. Compact quantum groups and q -special functions. En *Representations of Lie groups and quantum groups*. V. Baldoni y M.A. Picardello (Eds.) Pitman Research Notes in Mathematics, Series 311. Longman Scientific & Technical, New York, 1994, 46–128. [49, 109, 120]
- [88] A. M. Krall. Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. *Proc. Royal Soc. of Edinburg* **87A** (1981), 271–288. [4]
- [89] H. L. Krall. On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation. *The Pennsylvania State College Bulletin* **6** (1941), 1–24. [4]
- [90] H. L. Krall y O. Frink. A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65** (1949), 100–115.
- [91] P. P. Kulish y E. V. Damaskinsky. On the q -oscillator and the quantum algebra $su_q(1, 1)$. *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990), 415–419. [62]
- [92] P. P. Kulish y E. K. Sklyanin. Quantum spectral transform method: recent developments. *Lecture Notes in Physics* **151**, Springer-Verlagpages, Berlin, 1982, 61–119. [48]
- [93] P. Lesky. Über polynomsysteme, die Sturm-Liouvilleschen differenzengleichungen genügen. *Math. Zeit.* **78** (1962), 231–254. [15]
- [94] M. Lorente. Raising and lowering operators, factorization method and differential/difference operators of hypergeometric type. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 569–588. [6, 47, 49, 54]
- [95] M. Lorente. Raising and lowering operators and their factorization for generalized orthogonal polynomials of hypergeometric type on homogeneous and non-homogeneous lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 183–198. [6]
- [96] A. J. Macfarlane. On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $su_q(2)$. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989), 4581–4588. [47, 56, 68]
- [97] A. A. Malashin. q -Analog of Racah polynomials on the lattice $x(s) = [s]_q[s + 1]_q$ and its connections with $6j$ -symbols for the $su_q(2)$ and $su_q(1, 1)$, quantum algebras (en ruso). Master thesis, Moscow State University, M.V. Lomonosov, 1992. [42, 49, 85, 86, 94]
- [98] I. A. Malkin y V. I. Man'ko. *Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems*. Nauka Publishers, Moscow, 1979. [5, 48]

- [99] F. Marcellán, A. Branquinho, y J. Petronilho. Classical orthogonal polynomials: a functional approach. *Acta Appl. Math.* **34** (1994), 283–303. [12, 14, 15, 15]
- [100] F. Marcellán y P. Maroni. Sur l’adjonction d’une masse de Dirac à une forme régulière et semi-classique. *Ann. Mat. Pura Appl.* **IV**(CLXII) (1992), 1–22. [108]
- [101] F. Marcellán y J. C. Petronilho. On the solutions of some distributional differential equations: Existence and characterizations of the classical moment functionals. *Integral Transforms and Special Functions* **2**(3) (1994), 185–218. [12, 14]
- [102] F. Marcellán y L. Salto. Discrete semi-classical orthogonal polynomials. *J. Differ. Equations Appl.* **4**(5) (1998), 463–496. [137]
- [103] P. Maroni. Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Math.* **301** (1985), 269–272. 4, [108]
- [104] P. Maroni. Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques. En M. Alfaro et al. (Eds.), *Orthogonal polynomials and their applications*, vol. **1329** de *Lectures Notes in Math.* Springer, Berlin, 1988, 279–290. [108]
- [105] P. Maroni. Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$. *Period. Math. Hung.* **21**(3) (1990), 223–248. [108]
- [106] P. Maroni. Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. En C. Brezinski et al. (Ed.), *Application aux polynômes orthogonaux in Orthogonal Polynomials and their Applications*, Baltzer, Basel, 1991, 95–130 [108]
- [107] P. Maroni. Semiclassical character and finite-type relations between polynomial sequences. *Appl. Num. Math.* **31** (1999), 295–330. [108, 124, 125]
- [108] P. Maroni y R. Sfaxi. Diagonal orthogonal polynomial sequences. *Meth. Appl. Anal.* **7** (2000), 769–792. [108, 123, 125, 126]
- [109] P. J. McCarthy. Characterizations of classical polynomials. *Port. Math.* **20**(1) (1961), 47–52. [15]
- [110] J. C. Medem. *Polinomios q -semiclásicos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1996. [15, 109]
- [111] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse, y F. Marcellán. On the q -polynomials: a distributional study. *J. Comput. Appl. Math.* **135** (2001), 157–196. [7, 12, 14, 15, 109, 110, 114, 120, 125]
- [112] W. Miller (Jr.). Lie theory and difference equations. *J. Math. Anal. Appl.* **28** (1969), 383–399. [6]
- [113] W. Miller (Jr.). Lie theory and q -difference equation. *SIAM J. Math. Anal.* **1** (1970), 171–188. [6, 54]
- [114] W. Miller (Jr.). *Symmetry Groups and their applications*. Academic Press, New York, 1972. [5]
- [115] Sh. M. Nagiyev. Difference Schrödinger equation and q -oscillator model. *Theoret. and Math. Phys.* **102** (1995), 180–187. [58]

- [116] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, y V. B. Uvarov. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Springer Series in Computational Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. [5, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 30, 39, 40, 42, 47, 49, 54, 59, 60, 73, 74, 85, 86, 90, 94, 109, 110, 125]
- [117] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov. Classical orthogonal polynomials in a discrete variable on nonuniform lattices (preprint en ruso). *Inst. Prikl. Mat. Im. M. V. Keldyshe Akad. Nauk SSSR* **17**, 1983. [85]
- [118] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov. *The Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1988. [5, 40, 59, 74]
- [119] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov. Polynomials solutions of hypergeometric type difference equations and their classification. *Integral Transforms and Special Functions* **1** (1993), 223–249. [17, 20, 21]
- [120] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1974. [37]
- [121] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish. Acad.* **46A** (1940), 9–16. [6]
- [122] E. Schrödinger. The factorization of the hypergeometric equation. *Proc. Roy. Irish. Acad.* **47A** (1941), 53–54. [6]
- [123] R. Sfaxi y F. Marcellán. Second structure relation for semiclassical orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math* **200**(2) (2007), 537–554. [122, 129]
- [124] J.A. Shohat. A differential equation for orthogonal polynomials. *Duke Math. J.* **5** (1939), 401–407. [107]
- [125] J. A. Shohat y J. D. Tamarkin. *The Problem of Moments*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1970. [69]
- [126] E. K. Sklyanin. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. *Funct. Anal. Appl.* **16** (1983), 263–270. [48, 85]
- [127] Yu. F. Smirnov. On factorization of difference equation of hypergeometric type. En M. Alfaro et al. (Eds.), *International Workshop on Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics*. Servicio de publicaciones de la Universidad Carlos III de Madrid. Leganes, Madrid, 1997, 153–161. [6, 47, 49, 54]
- [128] Yu. F. Smirnov. Finite difference equations and factorization method. En P. Kasperkovitz y D. Grau (Eds.), *Proc. 5th Wigner Symposium*, World Scientific, 1998, 148–150. [6, 47]
- [129] Yu. F. Smirnov. Factorization method: New aspects. *Rev. Mex. Fis.* **45** (1999), 1–6. [6, 47]
- [130] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, y Yu. I. Kharitonov. Method of projection operators and the q -analog of the quantum theory of angular momentum. Clebsch-Gordan coefficients and irreducible tensor operators. *Sov. J. Nucl. Phys.* **53** (1991), 593–605. [49, 86, 97]
- [131] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, y Yu. I. Kharitonov. Projection operator and the q -analog of the quantum theory of angular momentum. Racah coefficients, $3j$ and $6j$ -symbols, and their symmetry properties. *Sov. J. Nucl. Phys.* **53** (1991), 1069–1086. [49, 86, 97, 98]

- [132] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, y Yu. I. Kharitonov. Tree technique and irreducible tensor operators for the $su_q(2)$ quantum algebra. $9j$ -symbols. *Soc. J. Nucl. Phys.* **55** (1992), 1599–1604. [49, 86, 97, 99]
- [133] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoi, y Yu. I. Kharitonov. The tree technique and irreducible tensor operators for the $su_q(2)$ quantum algebra. The algebra of irreducible tensor operators. *Physics Atom. Nucl.* **56** (1993), 690–700. [49, 86]
- [134] V. Spiridonov, L. Vinet, y A. Zhedanov. Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra. *Lett. Math. Phys.* **29** (1993), 63–73. [6]
- [135] T. J. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6* **4**(2) (1995), 36–75. [3]
- [136] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 23. Providence, Rhode Island, 4^a edition, 1975. [4, 5]
- [137] V. B. Uvarov. The connection between systems of polynomials that are orthogonal with respect to different distribution. *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **9** (1969), 25–36. [114]
- [138] N. Ja. Vilenkin y A. U. Klimyk. *Representations of Lie Groups and Special Functions*, **vols. I, II, III**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, The Netherlands, 1992. [48, 49, 86]
- [139] L. Vinet, O. Yermolayeva, y A. Zhedanov. A method to study the Krall and q-Krall polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **133** (2001), 647–656. [109]
- [140] W. Van Assche. Discrete painlevé equations for recurrence coefficients of orthogonal polynomials. *Proceedings of the international conference on Difference Equations, Special Functions and Applications*. [140]
- [141] A. S. Zhedanov. “Hidden symmetry” of the Askey-Wilson polynomials, *Theoret. and Math. Phys.* **89** (1991), 1146–1157. [64]